Районный тур 2023/24 учебный год. 11 класс. Решения.

Задача 1. I вариант.

Пока нить прижимают к центральному блоку, оба груза едут вверх с постоянной скоростью V.

Как только нить отпустили, более тяжёлый груз начинает перетягивать более лёгкий. Силы, действующие на грузы, представлены на рис. (1). Согласно II закону Ньютона для каждого груза в проекции на ось Oz

$$T - mg = ma, \qquad T - Mg = -Ma,$$

откуда несложно выразить $a = (M-m)g/(M+m) = g/3$.

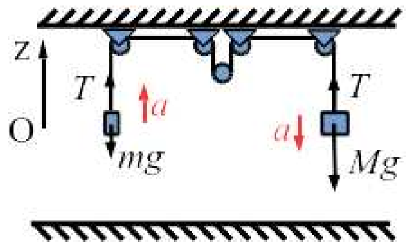

Рис. 1: Силы тяжести, натяжения нити, ускорения грузиков

Когда нить отпустили, движение каждого груза становится равноускоренным, у лёгкого груза это ускорение направлено вверх, у тяжёлого – вниз. Начальная скорость каждого груза равна V и направлена вверх. Понятно, что у лёгкого груза ускорение и начальная скорость направлены в одну сторону, поэтому расстояние h он преодолеет быстрее, чем тяжёлый груз, у которого ускорение и начальная скорость противонаправлены.

Для лёгкого груза уравнение равноускоренного движения в проекции на ось Oz имеет вид $z(t) = at^2/2 + Vt$, а значит, он достигнет потолка в момент t_1, при котором

$$z(t_1) = h = \frac{at_1^2}{2} + Vt_1 \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = \frac{-V \pm \sqrt{V^2 + 2ah}}{a}.$$

Очевидно, нас интересует лишь положительный корень этого уравнения.

Ответ: Лёгкий груз ударится в потолок в момент

$$t_1 = \frac{\sqrt{V^2 + 2gh/3} - V}{g/3}.$$

Задача 2. I вариант. Если пробирка расположена дном вниз, вес поршня оказывает дополнительное завление на газ в пробирке. Действительно, если атмосферное давление P, вес поршня mg а площадь сечения S, то давление раза в пробирке будет $P + \Delta p$, где $\Delta p = mg/S$. Тогда разница сил давлений, действующих на поршень скомпенсирует его вес (см. рис. 2).

Если же пробирку перевернуть, дваление воздуха в пробирке должно быть $P - \Delta p$ – меньше атмосчерного на ту же величину. Тогда разница давлений снова скомпенсинует вес поршня.

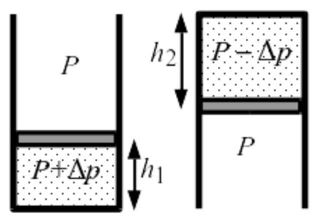

Рис. 2: Изменение давления газа в пробирке

Запишем уравнение Клапейрона-Менделеева для опытов Гоши в первый день:

$$(P + \Delta p)Sh_1 = \nu RT_0, \qquad (P - \Delta p)Sh_2 = \nu RT_0,$$

здесь мы ввели количество воздуха в пробирке ν и обозначили температуру на улице в первый день через $T_0 = 273$ K.

Из этой системы легко выазить отношение $z = P/\Delta p$, разделив эти уравнения друг на друга почленно:

$$\frac{(P+\Delta p)}{(P-\Delta p)}\frac{h_1}{h_2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{P+\Delta p}{P-\Delta p} = \frac{P/\Delta p + 1}{P/\Delta p - 1} = \frac{z+1}{z-1} = \frac{h_2}{h_1} \qquad \Rightarrow \qquad z = \frac{h_2 + h_1}{h_2 - h_1} = 10.$$

Теперь легко догадаться, что через несколько дней на улице изменилась не только температура, но и атмосферное давление, ведь

$$\frac{h_2' + h_1'}{h_2' - h_1'} = 10,764706 \neq \frac{h_2 + h_1}{h_2 - h_1}.$$

Разумеется, этот результат можно получить, рассмотрев соответствующие уравнения Клапейрона-Менделеева

$$(P' + \Delta p)Sh_1' = \nu RT_k, \qquad (P' - \Delta p)Sh_2' = \nu RT_k,$$

где T_k – искомая температура в последний день опытов, а P' – новое атмосферное давление. Мы уже знаем, что $z' = P'/\Delta p = 10,764706$.

Чтобы определить температуру T_k, можно разделить друг на друга уравнения, относящиеся к разным дням, но к одинаковым расположениям пробирок:

$$\frac{(P + \Delta p)h_1}{(P' + \Delta p)h_1'} = \frac{T_0}{T_k}.$$

Разделив числитель и значенатель слева на Δp, получим

$$\frac{(P/\Delta p + 1)h_1}{(P'/\Delta p + 1)h_1'} = \frac{(z + 1)h_1}{(z' + 1)h_1'} = \frac{T_0}{T_k} \qquad \Rightarrow \qquad T_k = T_0\frac{(z' + 1)h_1'}{(z + 1)h_1}.$$

Ответ получается, если перевести эту температуру в градусы Цельсия.

Ответ: Температура стала $-3,7°$C.

Примечание. Можно вычислять температуру с помощью аналогичной формулы для перевёрнутой пробирки

$$T_k = T_0\frac{(z' - 1)h_2'}{(z - 1)h_2},$$

получится такой же ответ.

Задача 3. I вариант.

Пусть V – скорость первой частицы, B – магнитное поле, m – масса частиц, q – заряд первой и третьей частиц.

Под действием силы Лоренца $F = qVB$ частица 1 двигается по окружности с постоянной скоростью. Окружность лежит в плоскости рисунка, радиус определяется вторым законом Ньютона

$$\frac{mV^2}{R} = qVB.$$

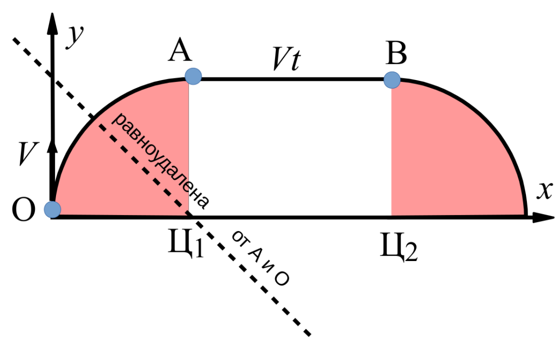

Рис. 3:

В каждый момент времени скорость частицы направлена по касательной к этой окружности, а значит, перпендикулярна радиусу, соединяющему частицу в этот момент с центром окружности. В начальный момент V вертикальна, следовательно центр окружности лежит на оси x. С другой стороны, частица оказывается и в точке О, и в точке А, то есть точки О и А лежат на этой окружности. Значит центр окружности равноудалён от О и А. Это однозначно задаёт центр окружности Ц$_1(a, 0)$ и её радиус $R = a$, см. рис. 3.

За время t частица 1 преодолевает путь Vt, с другой стороны, это четверть четверть окружности длиной $2\pi a$:

$$\frac{\pi a}{2} = Vt. \tag{1}$$

Рассмотрим столкновение частиц 1 и 2 в точке А. Перед самым столкновением частица 1 имела скорость V, направленную вдоль оси x, частица 2 покоилась. По закону сохранения энергии и импульса в результате абсолютно упругого центрального удара частицы одинаковой массы «обмениваются скоростями»: частица 1 остановится, а частица 2 начнёт движение со скоростью V вдоль оси x.

Рассмотрим дальнейшее движение частицы 2. Так как она незаряжена, на неё не действует сила Лоренца, не действуют и другие внешние силы. Частица движется по отрезку AB, и за время t пролетит расстояние Vt. Из соотношения (1) оно равно $\pi a/2$.

При столкновении частиц 2 и 3 в точке B они снова «обменяются скоростями»: частица 2 остановится, а частица 3 сразу после удара начнёт двигаться со скоростью V вдоль оси x.

Так как частица 3 обладает таким же зарядом, как и первая частица, такой же массой и движется с той же скоростью, под действием силы Лоренца она начнёт двигаться по окружности такого же радиуса a, что и частица 1. Центр этой окружности лежит на линии, перпендикулярной скорости третьей частицы сразу после удара, т.е. в точке $Ц_2(a + \pi a/2, 0)$.

Таким образом, к моменту столкновения с полом частица 3 преодолеет ещё четверть окружности и окажется в точке с координатами $(2a + \pi a/2, 0)$.

Ответ: $(2a + \pi a/2, 0)$.

Задача 4. I вариант.

«Квазиоптический» способ решения

Во-первых, по условию всё равно, в какую точку на берегу идти. Поэтому понятно, что сфотографировав где-то на окружности (в точке A, см. рис. 4) птичку, Саша должен идти перпендикулярно берегу.

Принцип, который можно применить при решении данной задачи – так называемый «принцип Ферма». Согласно нему все законы распространения света сводятся к тому, что свет попадает из начальной точки в конечную за наименьшее время. Таким образом, если Саша будет двигаться по той же траектории, что и луч света, можно гарантировать, что его путь займёт наикратчайшее время.

Пусть луч, испущенный из точки C («Саша»), отразился от зеркальной поверхности радиуса R в точке A и стал распространяться перпендикулярно берегу. При отражении угол падения $\angle 1$ был равен углу отражения $\angle 2$ (см. рис. 4).

Обозначим $\angle AOC = \alpha$. Из рисунка видно, что углы, отмеченные одинаковым цветом, равны, поэтому

$$\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ - \alpha, \qquad \angle OCA = 90^\circ - 2\alpha.$$

Из суммы углов в $\triangle AOC$ легко найти $\angle OAC = 90^\circ + \alpha$.

Воспользуемся теоремой синусов для треугольника AOC:

$$\frac{4R}{\sin(90^\circ + \alpha)} = \frac{R}{\sin(90^\circ - 2\alpha)}. \qquad (2)$$

Используем тригонометрические равенства

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha, \qquad \sin(90^\circ - 2\alpha) = \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

и перепишем (2) в виде

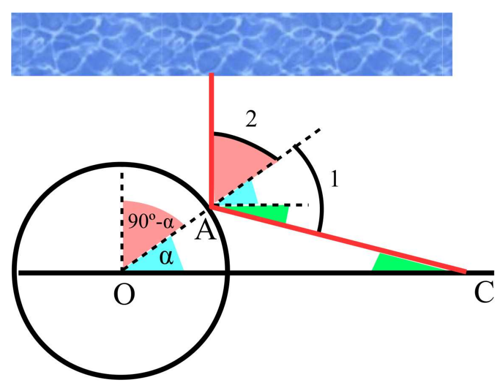

Рис. 4:

$$\frac{4}{\cos\alpha} = \frac{R}{2\cos^2\alpha - 1} \qquad \Rightarrow \qquad 8\cos^2\alpha - \cos\alpha - 4 = 0.$$

Дискриминант квадратного уравнения $D = 129$, его корни $\cos\alpha_{1,2} = (1 \pm \sqrt{129})/16$.

Отрицательный корень соответствует случаю, когда Саша подходит к птице слева, что не соответствует условию, поэтому следует оставить лишь положительный корень α_1.

Решение через минимизацию

Данный способ решения не опирается на оптические аналогии. Вместо этого минимизируем пройденный Сашей путь $S_1 + S_2$ как функцию угла α, под которым находится точка фотографирования A (см. рис. 5).

Обозначим расстояние от прямой OC до берега через H. Тогда расстояние от точки A до берега

$$S_1 = H - R\sin\alpha.$$

Расстояние |AC| найдём по теореме косинусов:

$$S_2 = |\mathrm{AC}| = \sqrt{|\mathrm{AO}|^2 + |\mathrm{OC}|^2 - 2|\mathrm{AO}||\mathrm{OC}|\cos\alpha},$$

подставляя $|\mathrm{OC}| = 4R$ и $|\mathrm{AO}| = R$, найдём

$$S_2 = \sqrt{16R^2 + R^2 - 2\cdot 4R\cdot R\cos\alpha} = R\sqrt{17 - 8\cos\alpha}$$

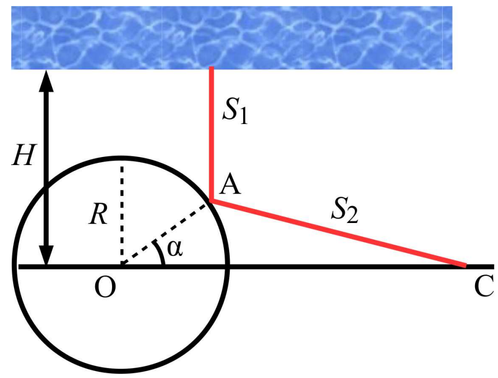

Рис. 5:

. Минимизируем функцию

$$S(\alpha) = H - R\sin\alpha + R\sqrt{17 - 8\cos\alpha}.$$

Для этого продифференцируем S по углу α и приравняем производную нулю:

$$\frac{dS}{d\alpha} = -R\cos\alpha + R\frac{4\sin\alpha}{\sqrt{17-8\cos\alpha}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \cos\alpha = \frac{4\sin\alpha}{\sqrt{17-8\cos\alpha}}.$$

Обе стороны последнего равенства возведём в квадрат

$$\cos^2\alpha = \frac{16\sin^2\alpha}{17-8\cos\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad \cos^2\alpha = \frac{16(1-\cos^2\alpha)}{17-8\cos\alpha}.$$

Это легко свести к кубическому уравнению на $x = \cos\alpha$:

$$8x^3 - 33x^2 + 16 = 0$$

По теореме Виета можно угадать целый корень этого уравнения $x = 4$. Данный корень, очевидно, не подходит в качестве решения, так как косинус угла не может превышать по модулю единицу. Тем не менее, зная один корень можно поделить уравнение на $(x-4)$, то есть представить его в виде

$$(x-4)(8x^2 - x - 4) = 0$$

и получить ещё два корня

$$x_{1,2} = \cos\alpha_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{129}}{16}.$$

Можно заметить, что корни, впрочем как и само квадратное уравнение, совпадают с теми, что были получены при применении принципа Ферма. Как и в том методе решения нас интересует лишь положительный корень

Ответ: Саша должен пойти к точке A, которая расположена на окружности под углом $\alpha_1 = \arccos\big((1+\sqrt{129})/16\big)$. Это соответсвует углу между траекторией Саши и пунктирной линией, равному $180^\circ - 2\alpha_1$.

Задача 5. I вариант. Для решения задачи важно понимать, что внутри равномерно заряженной сферы заряд не испытывает никакого её влияния. Иначе говоря, притяжение со стороны всех элементов заряженной шарообразной «скорлупы» компенсируют друг друга для объектов, находящихся внутри неё. Этот факт можно получить самыми разными способами. Проще всего доказать его, вспомнив, что металлический шар заряжается только по поверхности, а заряд «в глубине» у него отсутствует. Если бы равномерно распределённый по сфере заряд притягивал электроны в глубине металлического шара, они бы продолжали двигаться и перераспределяться, пока их поле не скомпенсировало бы влияние поверхностного заряда. В результате, заряд распределялся бы не только по поверхности.

Это означает, что внутри сферы бусинка испытывает лишь влияние плоскости. При плотности заряда σ плоскость создаёт поле напряжённостью $E = \sigma/(2\epsilon_0)$, притягивая бусинку с силой

$$F = qE = \frac{q\sigma}{2\epsilon_0}. \tag{3}$$

В результате бусинка будет двигаться равнозамедленно с ускорением $a = q\sigma/(2\epsilon_0 m)$, направленным к плоскости.

Уравнение движения бусинки в проекции на ось, направленную от плоскости, имеет при этом вид

$$z(t) = V_0 t - at^2/2,$$

при этом бусинка может достигнуть точки $z = 2R$ в момент t_1

$$z(t_1) = 2R = V_0 t_1 - at_1^2/2 \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = \frac{V_0 \pm \sqrt{V_0^2 - 4aR}}{a}.$$

Разумеется, нас интересует наименьший корень этого уравнения.

Можно заметить, что частица может и не вылететь за пределы сферы. Найденные корни вообще исчезают, если

$$V_0^2 < 4aR = \frac{2Rq\sigma}{\epsilon_0 m}.$$

В этом случае начальной кинетической энергии бусинки не хватает для того, чтобы преодолеть силу притяжения к плоскости и удалиться от нее на расстояние $2R$.

Определим, с какой скоростью V надо запустить бусинку, что она улетела на расстояние $3R$, использовав закон сохранения энергии.

В начальный момент бусинка имела кинетическую энергию, а также энергию взаимодействия с плоскостью и сферой.

В конечный момент, когда бусинка удалилась от плоскости на $3R$, плоскость совершила над бусинкой работу $-3FR$, значит энергия их взаимодействия увеличилась на $3FR$.

Энергия взаимодействия бусинки со сферой менялась, только когда бусинка была снаружи сферы. У поверхности бусинка имела энергию kqQ/R (эта величина положительна, так как q и Q одноимённые), а удалившись от плоскости на $3R$, она расположилась на расстоянии $2R$ от сферы, то есть имеет энергию $kqQ/(2R)$. Итого изменение энергии взаимодействия бусинки со сферой

$$\frac{kqQ}{2R} - \frac{kqQ}{R} = -\frac{kqQ}{2R} < 0$$

Итого при удалении от плоскости на $3R$ электрическая энергия увеличилась на $3FR - kqQ/(2R)$. Исходной кинетической энергии должно для этого хватать:

$$\frac{mV^2}{2} \geq 3FR - \frac{kqQ}{2R}.$$

Отсюда, подставляя найденное значение F из (3), легко выразить V. Записывая ответ, можно учесть, что электрическая постоянная в системе СИ $k = (4\pi\epsilon_0)^{-1}$

<u>Ответ</u>: Бусинка вылетит из сферы через время

$$t_1 = \frac{V_0 - \sqrt{V_0^2 - 4aR}}{a}, \quad \text{где} \quad a = \frac{q\sigma}{2\epsilon_0 m}.$$

Это произойдёт только если выражение под корнем неотрицательно, то есть когда

$$V_0^2 \geq \frac{2Rq\sigma}{\epsilon_0 m}. \tag{4}$$

Чтобы бусинка улетела от плоскости на расстояние $3R$, скорость должна удовлетворять неравенству

$$V^2 \geq \frac{2}{m}\left(\frac{3q\sigma R}{2\epsilon_0} - \frac{kqQ}{2R}\right) = \frac{qR}{m\epsilon_0}\left(3\sigma - \frac{Q}{4\pi R^2}\right).$$

Если выражение в правой части здесь отрицательно, достаточно лишь условия (4).

Районный тур 2023/24 учебный год. 11 класс. Решения.

Задача 1. II вариант.

Пока нить прижимают к центральному блоку, оба груза едут вверх с постоянной скоростью V.

Как только нить отпустили, более тяжёлый груз начинает перетягивать более лёгкий. Силы, действующие на грузы, представлены на рис. (6). Согласно II закону Ньютона для каждого груза в проекции на ось Oz

$$T - mg = ma, \qquad T - Mg = -Ma,$$

откуда несложно выразить $a = (M - m)g/(M + m) = g/2$.

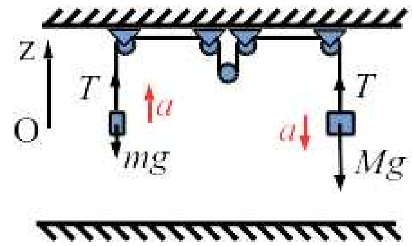

Рис. 6: Силы тяжести, натяжения нити, ускорения грузиков

Когда нить отпустили, движение каждого груза становится равноускоренным, у лёгкого груза это ускорение направлено вверх, у тяжёлого – вниз. Начальная скорость каждого груза равна V и направлена вверх. Понятно, что у лёгкого груза ускорение и начальная скорость направлены в одну сторону, поэтому расстояние h он преодолеет быстрее, чем тяжёлый груз, у которого ускорение и начальная скорость противонаправлены.

Для лёгкого груза уравнение равноускоренного движения в проекции на ось Oz имеет вид $z(t) = at^2/2 + Vt$, а значит, он достигнет потолка в момент t_1, при котором

$$z(t_1) = h = \frac{at_1^2}{2} + Vt_1 \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = \frac{-V \pm \sqrt{V^2 + 2ah}}{a}.$$

Очевидно, нас интересует лишь положительный корень этого уравнения.

<u>Ответ</u>: Лёгкий груз ударится в потолок в момент

$$t_1 = \frac{\sqrt{V^2 + gh} - V}{g/2}.$$

Задача 2. II вариант. Если пробирка расположена дном вниз, вес поршня оказывает дополнительное завление на газ в пробирке. Действительно, если атмосферное давление P, вес поршня mg а площадь сечения S, то давление раза в пробирке будет $P + \Delta p$, где $\Delta p = mg/S$. Тогда разница сил давлений, действующих на поршень скомпенсирует его вес (см. рис. 7).

Если же пробирку перевернуть, двaление воздуха в пробирке должно быть $P - \Delta p$ – меньше атмосчерного на ту же величину. Тогда разница давлений снова скомпенсинует вес поршня.

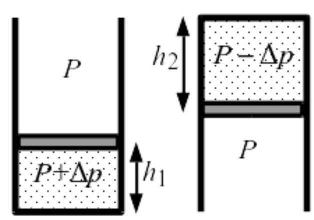

Рис. 7: Изменение давления газа в пробирке

Запишем уравнение Клапейрона-Менделеева для опытов Гоши в первый день:

$$(P + \Delta p)Sh_1 = \nu RT_0, \qquad (P - \Delta p)Sh_2 = \nu RT_0,$$

здесь мы ввели количество воздуха в пробирке ν и обозначили температуру на улице в первый день через $T_0 = 273$ K.

Из этой системы легко вызазить отношение $z = P/\Delta p$, разделив эти уравнения друг на друга почленно:

$$\frac{(P + \Delta p)}{(P - \Delta p)}\frac{h_1}{h_2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{P + \Delta p}{P - \Delta p} = \frac{P/\Delta p + 1}{P/\Delta p - 1} = \frac{z + 1}{z - 1} = \frac{h_2}{h_1} \qquad \Rightarrow \qquad z = \frac{h_2 + h_1}{h_2 - h_1} = 10.$$

Теперь легко догадаться, что через несколько дней на улице изменилась не только температура, но и атмосферное давление, ведь

$$\frac{h_2' + h_1'}{h_2' - h_1'} = 10,764706 \neq \frac{h_2 + h_1}{h_2 - h_1}.$$

Разумеется, этот результат можно получить, рассмотрев соответствующие уравнения Клапейрона-Менделеева

$$(P' + \Delta p)Sh_1' = \nu RT_k, \qquad (P' - \Delta p)Sh_2' = \nu RT_k,$$

где T_k – искомая температура в последний день опытов, а P' – новое атмосферное давление. Мы уже знаем, что $z' = P'/\Delta p = 10,764706$.

Чтобы определить температуру T_k, можно разделить друг на друга уравнения, относящиеся к разным дням, но к одинаковым расположениям пробирок:

$$\frac{(P + \Delta p)h_1}{(P' + \Delta p)h_1'} = \frac{T_0}{T_k}.$$

Разделив числитель и значенатель слева на Δp, получим

$$\frac{(P/\Delta p + 1)h_1}{(P'/\Delta p + 1)h_1'} = \frac{(z + 1)h_1}{(z' + 1)h_1'} = \frac{T_0}{T_k} \qquad \Rightarrow \qquad T_k = T_0 \frac{(z' + 1)h_1'}{(z + 1)h_1}.$$

Ответ получается, если перевести эту температуру в градусы Цельсия.

Ответ: Температура стала $-3,7°$C.

Примечание. Можно вычислять температуру с помощью аналогичной формулы для перевёрнутой пробирки

$$T_k = T_0 \frac{(z' - 1)h_2'}{(z - 1)h_2},$$

получится такой же ответ.

Задача 3. II вариант.

Пусть V – скорость первой частицы, B – магнитное поле, m – масса частиц, q – заряд первой и третьей частиц.

Под действием силы Лоренца $F = qVB$ частица 1 двигается по окружности с постоянной скоростью. Окружность лежит в плоскости рисунка, радиус определяется вторым законом Ньютона

$$\frac{mV^2}{R} = qVB.$$

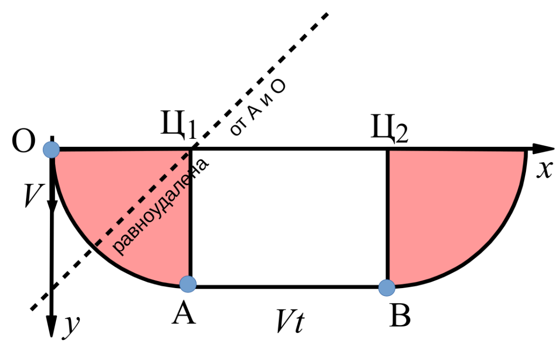

Рис. 8:

В каждый момент времени скорость частицы направлена по касательной к этой окружности, а значит, перпендикулярна радиусу, соединяющему частицу в этот момент с центром окружности. В начальный момент V вертикальна, следовательно центр окружности лежит на оси x. С другой стороны, частица оказывается и в точке O, и в точке A, то есть точки O и A лежат на этой окружности. Значит центр окружности равноудалён от O и A. Это однозначно задаёт центр окружности Ц$_1(a, 0)$ и её радиус $R = a$, см. рис. 8.

За время t частица 1 преодолевает путь Vt, с другой стороны, это четверть четверть окружности длиной $2\pi a$:

$$\frac{\pi a}{2} = Vt. \qquad (5)$$

Рассмотрим столкновение частиц 1 и 2 в точке A. Перед самым столкновением частица 1 имела скорость V, направленную вдоль оси x, частица 2 покоилась. По закону сохранения энергии и импульса в результате абсолютно упругого центрального удара частицы одинаковой массы «обмениваются скоростями»: частица 1 остановится, а частица 2 начнёт движение со скоростью V вдоль оси x.

Рассмотрим дальнейшее движение частицы 2. Так как она незаряжена, на неё не действует сила Лоренца, не действуют и другие внешние силы. Частица движется по отрезку AB, и за время t пролетит расстояние Vt. Из соотношения (5) оно равно $\pi a/2$.

При столкновении частиц 2 и 3 в точке B они снова «обменяются скоростями»: частица 2 остановится, а частица 3 сразу после удара начнёт двигаться со скоростью V вдоль оси x.

Так как частица 3 обладает таким же зарядом, как и первая частица, такой же массой и движется с той же скоростью, под действием силы Лоренца она начнёт двигаться по окружности такого же радиуса a, что и частица 1. Центр этой окружности лежит на линии, перпендикулярной скорости третьей частицы сразу после удара, т.е. в точке $\text{Ц}_2(a+\pi a/2, 0)$.

Таким образом, к моменту столкновения с потолком частица 3 преодолеет ещё четверть окружности и окажется в точке с координатами $(2a + \pi a/2, 0)$.

Ответ: $(2a + \pi a/2, 0)$.

Задача 4. II вариант.

«Квазиоптический» способ решения

Во-первых, по условию всё равно, в какую точку на берегу идти. Поэтому понятно, что сфотографировав где-то на окружности (в точке A, см. рис. 4) птичку, Саша должен идти перпендикулярно берегу.

Принцип, который можно применить при решении данной задачи – так называемый «принцип Ферма». Согласно нему все законы распространения света сводятся к тому, что свет попадает из начальной точки в конечную за наименьшее время. Таким образом, если Саша будет двигаться по той же траектории, что и луч света, можно гарантировать, что его путь займёт наикратчайшее время.

Пусть луч, испущенный из точки C («Саша»), отразился от зеркальной поверхности радиуса R в точке A и стал распространяться перпендикулярно берегу. При отражении угол падения $\angle 1$ был равен углу отражения $\angle 2$ (см. рис. 9).

Обозначим $\angle \text{AOC} = \alpha$. Из рисунка видно, что углы, отмеченные одинаковым цветом, равны, поэтому

$$\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ - \alpha, \qquad \angle \text{OCA} = 90^\circ - 2\alpha.$$

Из суммы углов в $\triangle \text{AOC}$ легко найти $\angle \text{OAC} = 90^\circ + \alpha$.

Воспользуемся теоремой синусов для треугольника AOC:

$$\frac{3R}{\sin(90^\circ + \alpha)} = \frac{R}{\sin(90^\circ - 2\alpha)}. \qquad (6)$$

Используем тригонометрические равенства

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha, \qquad \sin(90^\circ - 2\alpha) = \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

и перепишем (6) в виде

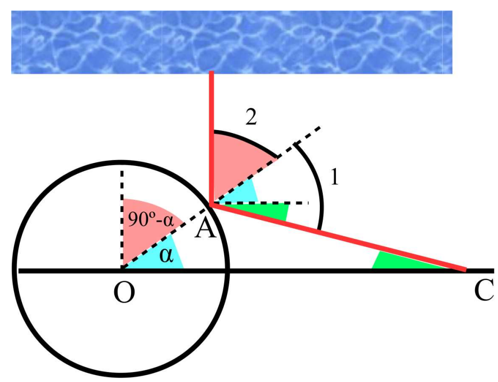

Рис. 9:

$$\frac{3}{\cos\alpha} = \frac{R}{2\cos^2\alpha - 1} \qquad \Rightarrow \qquad 6\cos^2\alpha - \cos\alpha - 3 = 0.$$

Дискриминант квадратного уравнения $D = 73$, его корни $\cos\alpha_{1,2} = (1 \pm \sqrt{73})/12$.

Отрицательный корень соответствует случаю, когда Саша подходит к птице слева, что не соответствует условию, поэтому следует оставить лишь положительный корень α_1.

Решение через минимизацию

Данный способ решения не опирается на оптические аналогии. Вместо этого минимизируем пройденный Сашей путь $S_1 + S_2$ как функцию угла α, под которым находится точка фотографирования A (см. рис. 10).

Обозначим расстояние от прямой OC до берега через H. Тогда расстояние от точки A до берега

$$S_1 = H - R\sin\alpha.$$

Расстояние $|AC|$ найдём по теореме косинусов:

$$S_2 = |AC| = \sqrt{|AO|^2 + |OC|^2 - 2|AO||OC|\cos\alpha},$$

подставляя $|OC| = 3R$ и $|AO| = R$, найдём

$$S_2 = \sqrt{9R^2 + R^2 - 2\cdot 3R\cdot R\cos\alpha} = R\sqrt{10 - 6\cos\alpha}$$

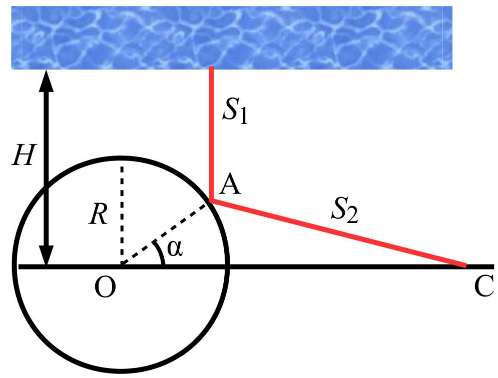

Рис. 10:

. Минимизируем функцию

$$S(\alpha) = H - R\sin\alpha + R\sqrt{10 - 6\cos\alpha}.$$

Для этого продифференцируем S по углу α и приравняем производную нулю:

$$\frac{dS}{d\alpha} = -R\cos\alpha + R\frac{3\sin\alpha}{\sqrt{10 - 6\cos\alpha}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \cos\alpha = \frac{3\sin\alpha}{\sqrt{10 - 6\cos\alpha}}.$$

Обе стороны последнего равенства возведём в квадрат

$$\cos^2\alpha = \frac{9\sin^2\alpha}{10 - 6\cos\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad \cos^2\alpha = \frac{9(1 - \cos^2\alpha)}{10 - 6\cos\alpha}.$$

Это легко свести к кубическому уравнению на $x = \cos\alpha$:

$$6x^3 - 19x^2 + 9 = 0$$

По теореме Виета можно угадать целый корень этого уравнения $x = 3$. Данный корень, очевидно, не подходит в качестве решения, так как косинус угла не может превышать по модулю единицу. Тем не менее, зная один корень можно поделить уравнение на $(x - 3)$, то есть представить его в виде

$$(x - 3)(6x^2 - x - 3) = 0$$

и получить ещё два корня

$$x_{1,2} = \cos\alpha_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{73}}{12}.$$

Можно заметить, что корни, впрочем как и само квадратное уравнение, совпадают с теми, что были получены при применении принципа Ферма. Как и в том методе решения нас интересует лишь положительный корень

Ответ: Саша должен пойти к точке A, которая расположена на окружности под углом $\alpha_1 = \arccos\big((1 + \sqrt{73})/12\big)$. Это соответсвует углу между траекторией Саши и пунктирной линией, равному $180^\circ - 2\alpha_1$.

Задача 5. II вариант. Для решения задачи важно понимать, что внутри равномерно заряженной сферы заряд не испытывает никакого её влияния. Иначе говоря, притяжение со стороны всех элементов заряженной шарообразной «скорлупы» компенсируют друг друга для объектов, находящихся внутри неё. Этот факт можно получить самыми разными способами. Проще всего доказать его, вспомнив, что металлический шар заряжается только по поверхности, а заряд «в глубине» у него отсутствует. Если бы равномерно распределённый по сфере заряд притягивал электроны в глубине металлического шара, они бы продолжали двигаться и перераспределяться, пока их поле не скомпенсировало бы влияние поверхностного заряда. В результате, заряд распределялся бы не только по поверхности.

Это означает, что внутри сферы бусинка испылывает лишь влияние плоскости. При плотности заряда σ плоскость создаёт поле напряжённостью $E = \sigma/(2\epsilon_0)$, притягивая бусинку с силой

$$F = qE = \frac{q\sigma}{2\epsilon_0}. \tag{7}$$

В результате бусинка будет двигаться равнозамедленно с ускорением $a = q\sigma/(2\epsilon_0 m)$, направленным к плоскости.

Уравнение движения бусинки в проекции на ось, направленную от плоскости, имеет при этом вид

$$z(t) = V_0 t - at^2/2,$$

при этом бусинка может достигнуть точки $z = 2R$ в момент t_1

$$z(t_1) = 2R = V_0 t_1 - at_1^2/2 \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = \frac{V_0 \pm \sqrt{V_0^2 - 4aR}}{a}.$$

Разумеется, нас интересует наименьший корень этого уравнения.

Можно заметить, что частица может и не вылететь за пределы сферы. Найденные корни вообще исчезают, если

$$V_0^2 < 4aR = \frac{2Rq\sigma}{\epsilon_0 m}.$$

В этом случае начальной кинетической энергии бусинки не хватает для того, чтобы преодолеть силу притяжения к плоскости и удалиться от нее на расстояние $2R$.

Определим, с какой скоростью V надо запустить бусинку, что она улетела на расстояние $3R$, использовав закон сохранения энергии.

В начальный момент бусинка имела кинетическую энергию, а также энергию взаимодействия с плоскостью и сферой.

В конечный момент, когда бусинка удалилась от плоскости на $3R$, плоскость совершила над бусинкой работу $-3FR$, значит энергия их взаимодействия увеличилась на $3FR$.

Энергия взаимодействия бусинки со сферой менялась, только когда бусинка была снаружи сферы. У поверхности бусинка имела энергию kqQ/R (эта величина положительна, так как q и Q одноимённые), а удалившись от плоскости на $3R$, она расположилась на расстоянии $2R$ от сферы, то есть имеет энергию $kqQ/(2R)$. Итого изменение энергии взаимодействия бусинки со сферой

$$\frac{kqQ}{2R} - \frac{kqQ}{R} = -\frac{kqQ}{2R} < 0$$

Итого при удалении от плоскости на $3R$ электрическая энергия увеличилась на $3FR - kqQ/(2R)$. Исходной кинетической энергии должно для этого хватать:

$$\frac{mV^2}{2} \geq 3FR - \frac{kqQ}{2R}.$$

Отсюда, подставляя найденное значение F из (7), легко выразить V. Записывая ответ, можно учесть, что электрическая постоянная в системе СИ $k = (4\pi\epsilon_0)^{-1}$

<u>Ответ</u>: Бусинка вылетит из сферы через время

$$t_1 = \frac{V_0 - \sqrt{V_0^2 - 4aR}}{a}, \quad \text{где} \quad a = \frac{q\sigma}{2\epsilon_0 m}.$$

Это произойдёт только если выражение под корнем неотрицательно, то есть когда

$$V_0^2 \geq \frac{2Rq\sigma}{\epsilon_0 m}. \tag{8}$$

Чтобы бусинка улетела от плоскости на расстояние $3R$, скорость должна удовлетворять неравенству

$$V^2 \geq \frac{2}{m}\left(\frac{3q\sigma R}{2\epsilon_0} - \frac{kqQ}{2R}\right) = \frac{qR}{m\epsilon_0}\left(3\sigma - \frac{Q}{4\pi R^2}\right).$$

Если выражение в правой части здесь отрицательно, достаточно лишь условия (8).