Функциональные уравнения и неравенства

Разбор

Алгебра для олимпиад

ФТШ

13 апреля 2020

Задача 1

Найдите все действительнозначные функции f, определенные на множестве всех действительных чисел кроме нуля такие, что $f(2019) = 1$ и

$$f(x)f(y) + f\left(\frac{2019}{x}\right) f\left(\frac{2019}{y}\right) = 2f(xy)$$

для всех x, $y \neq 0$.

Задача 1

Найдите все действительнозначные функции f, определенные на множестве всех действительных чисел кроме нуля такие, что $f(2019) = 1$ и

$$f(x)f(y) + f\left(\frac{2019}{x}\right) f\left(\frac{2019}{y}\right) = 2f(xy)$$

для всех x, $y \neq 0$.

Положим $x = y = 1$, получим $f^2(1) + f^2(2019) = 2f(1) \iff f^2(1) - 2f(1) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad f(1) = 1$.
Положим $y = 1$, получим $f(x) + f\left(\frac{2019}{x}\right) = 2f(x) \iff f(x) = f\left(\frac{2019}{x}\right)$. Откуда $f(x)f(y) = f(xy)$.
Рассмотрим $f^2(x) = f(x)f(x) = f(x)f\left(\frac{2019}{x}\right) = f\left(x \cdot \frac{2019}{x}\right) = f(2019) = 1$, следовательно $f(x) = \pm 1$.
Так как $0 < f^2(x) = f(x^2)$, то $f(x) = 1$, для $x > 0$.
Так как $f(xy) = f(x)f(y) = f(y)$, при $x > 0$, то при $t < 0$ значение функции $f(t)$ однозначно определяется значением $f(-1)$.

Таким образом $f(x) = 1$, $x \neq 0$; $f(x) = \begin{cases} 1, x > 0, \\ -1, x < 0. \end{cases}$

Задача 2

Найдите все такие функции $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, *что для любого положительного* x *справедливо*

$$x^3 f^3(x) + 1 = xf(x)(1 + xf(x)).$$

Задача 2

Найдите все такие функции $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, что для любого положительного x справедливо

$$x^3 f^3(x) + 1 = xf(x)(1 + xf(x)).$$

Пусть $xf(x) = t$, тогда

$$t^3+1 = t(1+t) \iff (t+1)(t^2-t+1) = t(t+1) \iff (t+1)(t-1)^2 = 0.$$

Откуда $t = \pm 1$. А значит, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in M, \\ \frac{-1}{x}, & \mathbb{R}_+ \setminus M, \end{cases}$ где $M \subseteq \mathbb{R}_+$ — произвольное множество.

Подстановкой убеждаемся, что данная функция удовлетворяет уравнению.

Задача 3

Найдите все такие функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *что для всех* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *выполняется неравенство*

$$\frac{1}{2}f(xy) + \frac{1}{2}f(xz) - f(x)f(yz) \geqslant \frac{1}{4}.$$

Задача 3

Найдите все такие функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что для всех $x, y, z \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{2}f(xy) + \frac{1}{2}f(xz) - f(x)f(yz) \geqslant \frac{1}{4}.$$

Сделаем подстановку $(x, y, z) = (1, 1, 1)$, получим $f(1) - f^2(1) \geqslant \frac{1}{4} \iff 0 \geqslant \left(f(1) - \frac{1}{2}\right)^2$, значит $f(1) = \frac{1}{2}$. Аналогично $f(0) = \frac{1}{2}$.

Сделаем подстановку $(x, y, z) = (x, 1, 1)$ и $(x, y, z) = (x, 0, 0)$, получим

$$\begin{matrix} \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}f(x) \geqslant \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(0) - f(x)f(0) \geqslant \frac{1}{4}, \end{matrix} \implies \begin{matrix} \frac{1}{2}f(x) \geqslant \frac{1}{4}, \\ -\frac{1}{2}f(x) \geqslant -\frac{1}{4}, \end{matrix} \implies f(x) = \frac{1}{2}.$$

Задача 4

Найти все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *такие, что*

$$f(a^2) - f(b^2) \leqslant (f(a) + b)(a - f(b))$$

для любых a, $b \in \mathbb{R}$.

Задача 4

Найти все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что

$$f(a^2) - f(b^2) \leqslant (f(a) + b)(a - f(b))$$

для любых a, $b \in \mathbb{R}$.

Сделаем подстановки $(a, b) = (x, y)$ и $(a, b) = (y, x)$:

$$\begin{cases} f(x^2) - f(y^2) \leqslant xy - f(x)f(y) + xf(x) - yf(y), \\ f(y^2) - f(x^2) \leqslant xy - f(x)f(y) - xf(x) + yf(y). \end{cases}$$

Складывая данные неравенства имеем $f(x)f(y) \leqslant xy$ для всех x и y. В частности $f^2(0) \leqslant 0$, что означает $f(0) = 0$.

Сделаем подстановки $(a, b) = (x, 0)$ и $(a, b) = (0, x)$:

$$\begin{cases} f(x^2) \leqslant xf(x), \\ -f(x^2) \leqslant -xf(x), \end{cases}$$

значит $f(x^2) = xf(x)$ и в частности $f(1) = -f(-1)$. Так как $f(1)f(x) \leqslant x$ и $-f(1)f(x) = f(-1)f(x) \leqslant -x$, то $f(1)f(x) = x$. Откуда $f^2(1) = 1$ и $f(1) = 1$ или $f(1) = -1$.
Проверкой убеждаемся, что $f(x) = x$ и $f(x) = -x$ являются решениями.

Задача 5

1. *Пусть* $P(x)$ *многочлен. Обозначим через* $Q(x) = P(x+1) - P(x)$. *Известно, что* $Q(x) = 0$ *для любого действительного* x, *докажите, что* $P(x)$ *— константа.*
2. *Пусть* $P(x)$ *многочлен. Обозначим через* $Q(x) = P(x+1) - P(x)$, *а через* $R(x) = Q(x+1) - Q(x)$. *Известно, что* $R(x) = 0$ *для любого действительного* x, *найдите* $P(x)$.
3. *Найдите все многочлены* P *такие, что* $P(x) + 3P(x+2) = 3P(x+1) + P(x+3)$ *для любого действительного* x.

1. Из $Q(x) = 0$ следует, что $P(x+1) = P(x)$, откуда по индукции легко показать, что $P(0) = P(1) = P(2) = \ldots$, но многочлен может принимать бесконечно много одинаковых значений только если он константа.
2. Из $R(x) = 0$ следует, что $Q(x) = a$ — константа. То есть $P(x+1) - P(x) = a$. Преобразуем данное равенство:

$$P(x+1) - a(x+1) - (P(x) - ax) = 0,$$

откуда следует, что многочлен $S(x) = P(x) - ax$ есть константа и $P(x) = ax + b$.

3. Пусть $Q(x) = P(x+1) - P(x)$,
$R(x) = Q(x+1) - Q(x) = P(x+2) - P(x+1) - P(x+1) + P(x) = P(x+2) - 2P(x+1) + P(x)$,
$S(x) = R(x+1) - R(x) = P(x+3) - 2P(x+2) + P(x+1) - P(x+2) + 2P(x+1) - P(x) = P(x+3) - 3P(x+2) + 3P(x+1) - P(x)$.

$$P(x) + 3P(x+2) = 3P(x+1) + P(x+3) \iff$$

$$S(x) \equiv 0 \iff R(x+1) - R(x) = 0,$$

Что означает, что R константа. Пусть $R(x) = 2a$. Тогда $Q(x) = 2ax+b$. Тогда

$$P(x+1) - P(x) = 2ax + b \iff$$

$$(P(x+1) - a(x+1)^2 - (b-a)(x+1)) - (P(x) - ax^2 - (b-a)x) = 0,$$

что означает $P(x) - ax^2 - (b-a)x$ есть константа. Таким образом $P(x) = ax^2 + (b-a)x + c$. То есть, $P(x)$ есть произвольный многочлен второй степени.

Задача 6

Для произвольного действительного α *найдите пары функций* (f, g) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *удовлетворяющие уравнению*

$$xf(x+y) + \alpha y f(x-y) = g(x) + g(y)$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}$.

Задача 6

Для произвольного действительного α найдите пары функций (f, g) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяющие уравнению

$$xf(x+y) + \alpha y f(x-y) = g(x) + g(y)$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}$.

Совершим подстановку $(x, y) = (0, 0)$. Получаем $g(0) = 0$.
Совершим подстановку $(x, y) = (x, 0)$. Получаем $g(x) = xf(x)$, тогда

$$xf(x+y) + \alpha y f(x-y) = xf(x) + yf(y).$$

Совершим подстановку $x = 0$, получим $\alpha y f(-y) = yf(y)$ для любого y, поэтому $\alpha f(-y) = f(y)$.

Если $\alpha = 0$, то $f(y) = 0$. Пусть теперь $\alpha \neq 0$, тогда для $x_0 \neq 0$ выполняется
$f(x_0) = \alpha f(-x_0) = \alpha(\alpha f(x_0)) = \alpha^2 f(x_0)$. Поэтому, если $\alpha^2 \neq 1$, то $f(x) = 0$. Но в любом случае $f(0) = 0$.
Если $\alpha = 1$, то функция f есть чётная, если $\alpha = -1$, то функция f есть нечётная.

Пусть $\alpha = 1$, совершим подстановку $(x, y) = (y, x)$, тогда

$$yf(y+x) + xf(y-x) = yf(y) + xf(x),$$

откуда

$$yf(x+y) + xf(y-x) = xf(x+y) + yf(x-y) \iff$$

$$(x-y)f(x+y) = xf(y-x) - yf(x-y).$$

Учитывая чётность функции f получаем

$$(x-y)f(x+y) = (x-y)f(x-y).$$

Сделаем подстановку $(x, y) = \left(\frac{t+1}{2}, \frac{t-1}{2}\right)$ и получим $f(t) = f(1)$, что означает, что $f(x) = C$, $g(x) = Cx$.

Пусть $\alpha = -1$, совершим подстановку $(x, y) = (y, x)$, тогда

$$yf(y+x) - xf(y-x) = yf(y) + xf(x),$$

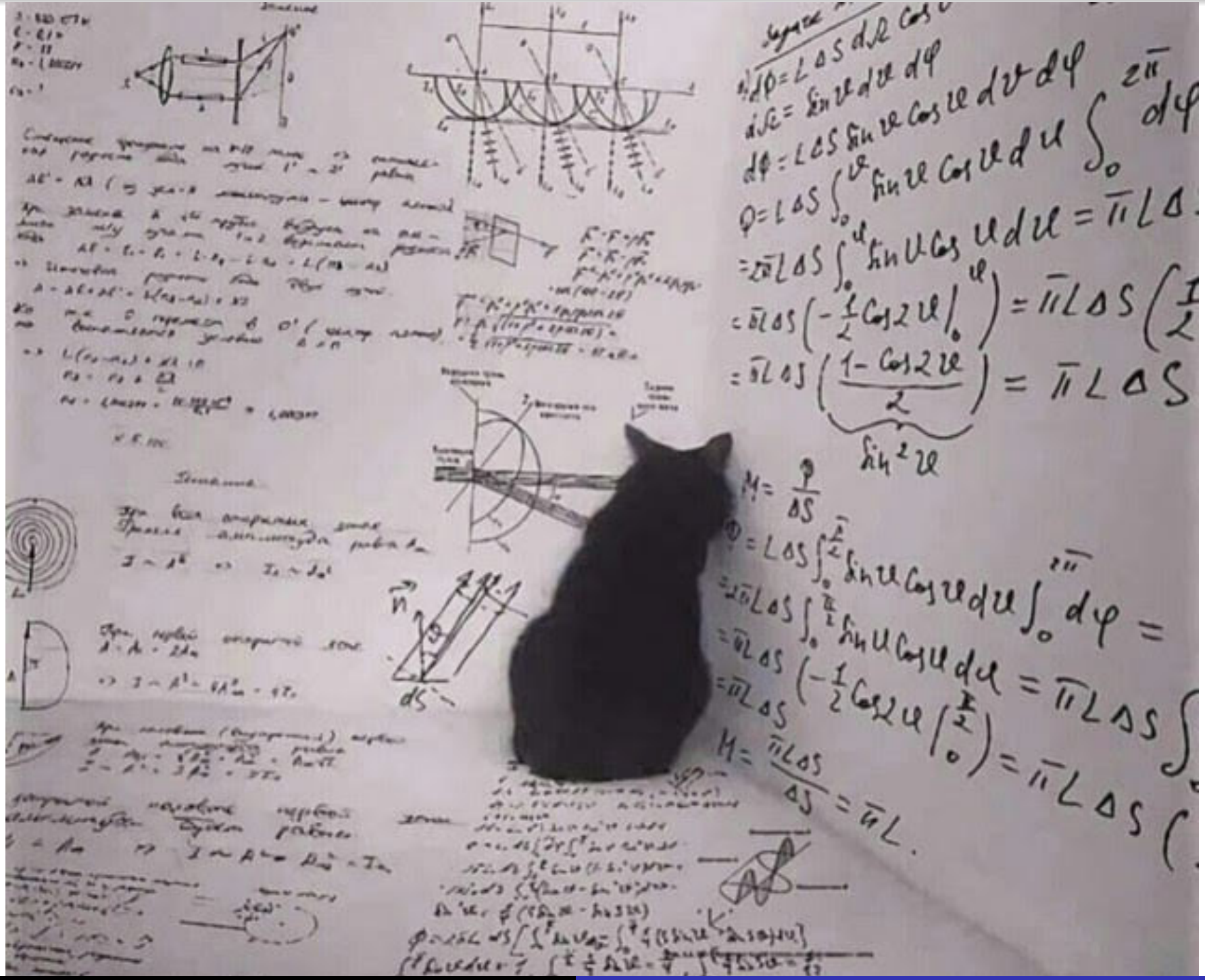
откуда

$$yf(x+y) - xf(y-x) = xf(x+y) - yf(x-y) \iff$$

$$(x-y)f(x+y) = -xf(y-x) + yf(x-y).$$

Учитывая нечётность функции f получаем

$$(x-y)f(x+y) = (x+y)f(x-y).$$

Сделаем подстановку $(x, y) = \left(\frac{t+1}{2}, \frac{t-1}{2}\right)$ и получим $f(t) = tf(1)$, что означает, что $f(x) = Cx$, $g(x) = Cx^2$.

Ответ:
$$\begin{array}{lll} \alpha = 1, & f(x) = C, & g(x) = Cx; \\ \alpha = -1 & f(x) = Cx, & g(x) = Cx^2; \\ \alpha^2 \neq 1 & f(x) = 0, & g(x) = 0. \end{array}$$