Операции

Алгебра в олимпиадных задачах

15 сентября 2020

Домашнее задание высылать по адресу: e-mail math8b.156@yandex.ru в теме обязательно указываем 1) ФТШ, 2) фамилию и имя, 3) алгебра.

Домашнее задание (прошлое)

Задача 1. *Маша и Лера состоят в клубе презирателей десятичной системы счисления. Их попросили записать несколько первых натуральных чисел в их любимой системе счисления (представление числа в виде* $\sum_{i=0}^{n} d_i b^i$*, где* d_i *будем называть цифрами, а* b *— основанием системы).*

a. *Маша записала 1; 2; 120; 121; 122; 110. Запишите в этой системе счисления числа* -15 *и 18.*
b. *Лера записала: 1; 10,01; 100,01; 101,01; 1000,1001. Запишите в этой системе счисления число 6 и определите основание системы счисления (оно больше 1), которой пользуется Лера. По правилам этой системы в записи числа две единицы подряд не могут идти, даже, если их разделяет запятая.*

Задача 2. *Император Децимус забанил использование цифры 0 и вместо неё ввел цифру* D*, обозначающую 10. Например, число* $12\text{D} = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 10 \cdot 10^0 = 130$.

a. *Запишите в нотации Децимуса число 2020. Верно ли, что любое натуральное число можно записать в нотации Децимуса единственным способом?*
b. *Запишите в обычном виде число* DDD.
c. *Сколько цифр* D *используется для записи всех чисел от 1 до* DDD*?*

Задача 3. *Натуральное число назовем позитивным, если в его двоичной записи количество цифр 1 чётно. Например,* $6 = 110_2$ *— позитивное число. Какое число является 2020-м позитивным числом?*

Операции

Задача 4. *Для любых чисел a и b операция $a \otimes b$ определена следующим образом: $a \otimes b = a^2 - b^2$. Вычислите:* $(2017 \otimes 2016) \otimes (2016 \otimes 2015)$.

Задача 5. *Через* $\max\{x, y\}$ *будем обозначать наибольшее из чисел x и y. Как-то в четверг Артур Филипп Дент придумал операцию $\star$: $a \star b = \max\{a+b, 2a\}$ и, пока лежал перед бульдозером, в уме пытался решить уравнение $x \star 100 = 71 \star x$. Решите данное уравнение.*

Операция $\star$ называется *коммутативной*, если $a \star b = b \star a$.

Операция $\star$ называется *ассоциативной*, если $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$.

Число e называется *правой единицей* для операции $\star$, если для любого числа x выполняется $x \star e = x$.

Число e называется *левой единицей* для операции $\star$, если для любого числа x выполняется $e \star x = x$.

Число e называется *единицей* для коммутативной операции $\star$, если для любого числа x выполняется $x \star e = e \star x = x$.

Число x^{-1} называется *левым обратным* для числа x, если $x^{-1} \star x = e$.

Число x^{-1} называется *правым обратным* для числа x, если $x \star x^{-1} = e$.

Число x^{-1} называется *обратным* для числа x, если $x \star x^{-1} = x^{-1} \star x = e$.

Задача 6. *На вещественных числах определена операция $\star$ по формуле* $x \star y = \dfrac{xy}{2}$.

а) Вычислить $12 \star 7$; $6 \star \dfrac{1}{3}$.

б) Проверьте, является ли операция коммутативной и ассоциативной.

в) Найдите элемент, играющий роль единицы для данной операции, а также для каждого элемента найдите обратный.

Задача 7. *На множестве действительных чисел введены операции* $\star$ *и* $\circ$*:*

$$x \star y = x + y - 1 \text{ и } x \circ y = xy - x - y + 2.$$

Докажите, что операции $\star$ *и* $\circ$ *ассоциативны и операция* $\circ$ *дистрибутивна относительно операции* $\star$*.*

Мат индукция наше всё

Задача 8. *На множестве положительных чисел определена операция* $\star$*:* $x \star y = \dfrac{xy}{x+y}$*. Вычислите*

$$\underbrace{(\ldots((2020 \star 2020) \star 2020) \star \ldots \star 2020) \star 2020}_{2020}.$$

Задача 9. *Операция* $\star$ *заданная формулой* $a \star b = ab + a + b$*. Вычислите*

$$1 \star (2 \star (\ldots \star (2018 \star (2019 \star 2020)) \ldots)).$$

Если индукция не проходит, то нужен здравый смысл

Задача 10. *Пусть* $a \star b = \dfrac{a-b}{1-ab}$*. Чему равно*

$$1 \star (2 \star (3 \star \ldots (2020 \star 2021) \ldots))?$$

Задача 11. *Пусть* $m \heartsuit n = \dfrac{m+n}{mn+4}$*. Чему равно*

$$(\ldots((2020 \heartsuit 2019) \heartsuit 2018) \heartsuit \ldots \heartsuit 1) \heartsuit 0?$$