I вариант

Задача 1. В бесконечной числовой последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ не все члены равны между собой. Для всех $n \geq 2$ выполняется равенство

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_n + x_{n+1}}{3}.$$

Найдите отношение $\dfrac{x_{2012} - x_{1006}}{x_{1006} - x_{503}}$.

Задача 2. Даны 2014 положительных чисел. Известно, что произведение любых тридцати пяти из них меньше единицы. Докажите, что произведение всех данных чисел меньше единицы.

Задача 3. Натуральное 61-значное число A записывается только цифрами 2, 3 и 4. При этом двоек на 19 больше, чем четверок. Найдите остаток от деления числа A на 9.

Задача 4. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Точки M, N, P и Q – середины сторон AB, BC, CD и DE соответственно, точки H и K – середины MP и NQ соответственно. Найдите длину отрезка HK, если $AE = 7$.

Задача 5. Найдите все решения уравнения

$$\left(y(x-1)\right)^2 + (x-1)^2 + y^2 + 1 - 4y|x-1| = 0.$$

Задача 6. Найдите все периодические функции $y = f(x)$, удовлетворяющие уравнению

$$f(x) - 0,5 f(x - \pi) = \sin x$$

при всех x.

Задача 7. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, а боковые стороны образуют угол 30°. Основания имеют длины 6 и 2. Найдите высоту трапеции.

Задача 8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\left|\ln|x|\right| = ax$ имеет три решения.

Задача 9. В городе 200 жителей. Часть из них – рыцари, которые всегда говорят правду, остальные – лже цы, которые всегда лгут. Каждый горожанин живет в одном из четырех кварталов (А, Б, В и Г). Каждому задали четыре вопроса: «Вы живете в квартале А?», «Вы живете в квартале Б?», «Вы живете в квартале В?», «Вы живете в квартале Г?». На первый вопрос утвердительно ответило 105 жителей, на второй – 45, на третий – 85 и на четвёртый – 65. В каком квартале лжецов живет больше, чем рыцарей и на сколько?

Задача 10. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с рёбрами $AB = 3$, $AD = 4$ и $AA_1 = 5$ проведены два сечения – плоскостью, проходящей через диагональ A_1C, и плоскостью, проходящей через диагональ B_1D. Найдите наибольшее возможное значение суммы площадей поверхностей многогранников, на которые эти сечения разбивают данный параллелепипед.

Страница олимпиады: http://olimpiada.ru/ommo

Объединенная межвузовская математическая олимпиада **03.02.2013**

I вариант

Задача 1. Ученикам 11 «А» класса на выбор предложили пройти тестирование ровно по одному из предметов: химии, информатике или физике. Трое ребят приняли участие в тестировании по химии; более 40%, но менее половины учеников проходили тестирование по информатике и ровно треть — по физике. Сколько ребят участвовало в тестировании по информатике, если в классе присутствовало более 12 учеников?

Задача 2. Из Москвы на Международный шахматный турнир в Нью-Васюках шахматисты всех команд (одинаковых по численности) добирались двумя способами. Некоторые команды заняли все места в 5-местных и одной 2-местной каютах парохода "Повелитель бурь". Другие команды предпочли занять все места в 7-местных и одной 4-местной каютах дирижабля "Скрябин". Сколько спортсменов было в команде, если занятых 7-местных кают оказалось на одну больше, чем занятых 5-местных?

Задача 3. Докажите, что число $2^{2014}+1$ можно представить в виде произведения трех натуральных чисел, больших 1.

Задача 4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ прямые AD и BC перпендикулярны, а длина отрезка, соединяющего середины диагоналей BD и AC, равна 2013. Найдите длину отрезка, соединяющего середины сторон CD и AB.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2\sin^2 y, \\ \sin^2 y + \cos^2 z = 1. \end{cases}$$

Задача 6. Пусть $S_n = f(0) + f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \ldots + f(\frac{n-1}{n}) + f(1)$. Найдите S_{2013} для $f(x) = \dfrac{9^x}{9^x+3}$.

Задача 7. На плоскости задана точка P. Рассматриваются различные равносторонние треугольники ABC, такие что $PA = 2$, $PB = 3$. Какое максимальное значение может принимать длина отрезка PC?

Задача 8. При каких значения параметра a уравнение $5x^4 + 7ax + 2a^2 = 0$ имеет хотя бы один целый корень?

Задача 9. Коробка конфет имеет форму правильной шестиугольной призмы со стороной основания 10 и высотой $5\sqrt{3}$. Из двух разных вершин коробки $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ одновременно с одной и той же скоростью начинают двигаться две мухи, меняя направление движения только в вершинах. Одна муха начинает движение в вершине A и двигается только по ребрам призмы, другая — только по диагоналям оснований и боковых граней. Через некоторое время мухи встречаются. В каких вершинах коробки может произойти встреча?

Задача 10. Единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ повернут на 90° вокруг прямой, проходящей через середины противоположных ребер AD и B_1C_1. Найдите объем общей части исходного куба и повернутого.