

Тригонометрия. Обратная тригонометрия.

1. Решите уравнение $\sqrt{1-2\sin 3x \cdot \sin 7x} = \sqrt{\cos 10x}$.
2. При каких значениях параметра a равносильны уравнения $\sin 2x(\sin 2x - 1) = 0$ и $(a+3)\sin^2 2x - \sin 2x \cos 4x - (a+4)\sin 2x = 0$?
3. Решите уравнение $3\sin 2x + 2(\sin x - \cos x) = 2$.
4. Решите уравнение $-\sqrt{1+\cos 2x} + 3\sqrt{\cos(x+\pi)} = \sqrt{2}$.
5. Решите уравнение $\arcsin x \cdot \arccos x = \pi^2/16$.
6. Решите уравнение $\arccos\left(\frac{3}{4} - x\right) = 2\arcsin x$.
7. Решите уравнение $\frac{4\sin x}{\cos x - 3\sin x} = \operatorname{ctg} x$ на отрезке $[0; \pi]$.
8. Найдите все решения уравнения $\sqrt{1+\cos x} - \sqrt{2} = \sqrt{6} \sin \frac{x}{2}$, удовлетворяющие условию $\cos \frac{x}{2} \leq 0$.
9. а) Решите уравнение $2\arccos x = \arccos(2x^2 - 1)$;
б) При каких a уравнения $2\arccos x = a$ и $\arccos(2x^2 - 1) = a$ равносильны?
10. Вычислите: $\sin\left(\arccos \frac{5}{13}\right) + \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg} \frac{41\pi}{9}\right)$.

Непрерывность и пределы.

11. Известно, что функции f , g , h непрерывны на \mathbb{R} . Известно, что $f \leq g \leq h$. Известно, что $f(x_1) = h(x_2) = 0$. Докажите, что существует $c \in [x_1; x_2]$, такое что $g(c) = 0$.
12. Докажите, что если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, то $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, такое что $0 < |x' - a| < \delta, 0 < |x'' - a| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.
13. Докажите, что если уравнение $f(x) = x$ не имеет корней для некоторой непрерывной функции f , то и уравнение $f(f(x)) = x$ также не имеет корней.
14. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{3x-1} - 2}{\operatorname{tg}(\pi x)}$
15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{x^2} - \ln \cos x - 1}{\sin^2 x}$
16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\sqrt[3]{1 + \sin^2 x} - 1}$
17. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|5-4x| - |x|}{x^3 - 4x + 3}$
18. Докажите, что если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ и g локально ограничена в a , то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Производная.

19. Докажите неравенство $x - \frac{x^3}{3} < \operatorname{arctg} x < x$ при $x > 0$.
20. Найдите множество значений функции $g(x) = f(x) - f\left(\frac{1}{x+1}\right)$, где $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$.
21. Найдите все a , при которых уравнение $ax^3 + (3a-1)x^2 + (3a+2)x + a - 1 = 0$ имеет 2 корня на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$?

22. Найдите все p , при которых касательная к $y = \cos 2x + p^2 - p + 1$ в точке графика с абсциссой p не пересекает график ни одной из функций $y = 3 - 2x$ и $y = x + \frac{3}{4x}$.
23. При каких значениях параметра a у уравнения $x^4 - ax^3 + (3 - 2a)x^2 + ax + 1 = 0$ есть как положительные, так и отрицательные решения?
24. Найти все такие a , что уравнение $x^4 + 2x^3 - x = 4a^2 - 2a$ имеет ровно 2 различных корня.
25. При каких значениях параметра a уравнение $x^4 - ax^3 + 27 = 0$ имеет хоть один корень больше 4?
26. Сколько решений в зависимости от a имеет уравнение $x(x-1)(x-2)(x-3) = a$?
27. Сколько корней имеет уравнение $4 \cdot e^{-x}(x^2 + x - 5) = 1$?
28. Найти геометрическое место вершин всех парабол вида $y = x^2 + ax + b$, касающихся прямой $y = 4x - 1$.

Логарифмы. Логарифмические уравнения и неравенства.

29. Сравните $\log_3 5$ и $\log_5 7$.
30. Решите неравенство $\log_3 x \leq \frac{3}{2 - \log_{1/3} x}$
31. Изобразите множество точек на плоскости, для которых $\frac{1}{\log_x(x^2 + y^2)} + \frac{1}{\log_{x+1}(x^2 + y^2)} > 1$.
32. При каких значениях параметра b уравнение $\log_{x+b}(b^2 + 4x) = 2$ имеет единственное решение?
33. При каких значениях параметра a неравенство $\log_{2a-1}(x^2 + 3) > 1$ выполняется при всех значениях x ?

Разное.

34. а) Докажите, что графики уравнений $y = 8 - x^2$ и $|y| = \sqrt{8 + x}$ симметричны относительно прямой $y = -x$;
- б) Решите уравнение $8 - x^2 = \sqrt{8 + x}$.
35. Пусть $f_1(x) = \sqrt{\frac{x^3 + 4}{3}}$; $f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x))$. Решите неравенство $f_{10}(x) \leq x$.
36. При каких значениях параметра a уравнение $ax = \arcsin(\sin x)$ имеет ровно 3 решения?
37. Сколько корней имеет уравнение $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = a$ в зависимости от a ?
38. Изобразите множество точек $M(a, b)$ координатной плоскости Oab таких, что уравнение $\sqrt{2x - b} = \sqrt{x^2 + 3ax - b}$ имеет два различных корня относительно x .
39. Найдите предел последовательности $p_n = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{4} \dots \cos \frac{\alpha}{2^n}$.
40. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{a - \sqrt{x + 2a}} = x - a$ имеет решения.
41. Существует ли многочлен $q(x)$, для которого $q(\sin x) = \sin 1996x$?
42. Сколько корней имеет уравнение $|x-1| + |x-2| + \dots + |x-2002| = a$ в зависимости от a ?
43. Сравните $(\sin 1^\circ)^{\cos 1^\circ}$ и $(\cos 1^\circ)^{\sin 1^\circ}$.
44. При каких значениях параметра b уравнения $\log_2(x+b)^2 + \log_2 x = 5$ и $2\log_2(x+b) - \log_{0.5} x = 5$ равносильны?
45. При каких значениях параметра a уравнение $\log_{2x+2a}(x^2 + a^2) = 1$ имеет единственное решение?

44 задачи +12 42 задачи +11 41 задача +10 39 задач +9 38 задач +8

35 задач +7 34 задачи +6 33 задачи +5 32 задачи +4 31 задача +3 30 задач +2 29 задач +1

20-28 задач - «Молодец!»