



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ  
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ  
РАЙОННЫЙ ЭТАП  
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
18 НОЯБРЯ 2023 г. I тур 10 КЛАСС 1 ВАРИАНТ

1. Леша отметил на прямой 200 точек так, что расстояние между любыми двумя из них равно целому числу сантиметров. При этом расстояние между самой левой и второй слева точками равно 2023 см., а расстояние между второй и третьей слева точками — 2024 см. Докажите, что найдутся как минимум 397 пар отмеченных точек, расстояния между которыми не делятся на 5.

2. На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  отмечена такая точка  $E$ , что  $\angle BEC = \angle ABC$ . На продолжении отрезка  $BE$  за точку  $E$  отмечена такая точка  $D$ , что  $\angle BCE = \angle CDE$ . На отрезке  $AB$  отмечена такая точка  $F$ , что  $BF = CD$ . Докажите, что прямая  $BC$  касается описанной окружности треугольника  $AFC$ .

3. У двух квадратных трёхчленов  $f$  и  $g$  с положительными старшими коэффициентами равны наименьшие значения. Докажите, что можно подобрать числа  $a$  и  $b$  так, чтобы выполнялось тождество  $g(x) = f(ax+b)$ .

4. В лесу расположена 101 полянка. Каждая дорожка в лесу соединяет две полянки (две полянки могут быть соединены максимум одной дорожкой). Назовем две полянки соседними, если они соединены дорожкой. Волк и Заяц играют в игру. Сначала Волк занимает одну из полянок по своему выбору, затем полянку себе выбирает Заяц. После этого игроки ходят по очереди (начинает Волк), каждым ходом игрок должен перебежать на одну из соседних полянок. Каждый игрок знает, где находится соперник. Волк поймает Зайца, если окажется на одной полянке с ним. Оказалось, что Заяц может действовать так, что Волк не сможет его поймать. При каком наибольшем количестве дорожек в лесу это возможно?

5. Четыре попарно различных натуральных числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  в сумме дают 20 000. Найдите наименьшее возможное значение  $\text{НОК}(a, b, c, d)$ .

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы укажите ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО; ДАТА РОЖДЕНИЯ; ТЕЛЕФОН; КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ; ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние. Списки прошедших на городской и региональный тур будут опубликованы на сайтах [www.pdmi.ras.ru/~olymp](http://www.pdmi.ras.ru/~olymp) и [olymp.acadentalant.ru](http://olymp.acadentalant.ru)



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ  
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ  
РАЙОННЫЙ ЭТАП  
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
18 НОЯБРЯ 2023 г. I тур 10 КЛАСС 2 ВАРИАНТ

1. Дима отметил на прямой 101 точку так, что расстояние между любыми двумя из них равно целому числу сантиметров. При этом расстояние между самой правой и второй справа точками равно 2022 см., а расстояние между второй и третьей справа точками — 2023 см. Докажите, что найдутся как минимум 199 пар отмеченных точек, расстояния между которыми не делятся на 4.

2. Дан выпуклый четырёхугольник  $ABCD$ , такой что  $AB = CD$ . На продолжении его стороны  $AB$  за точку  $B$  отмечена точка  $P$ . Отрезки  $AC$  и  $DP$  пересекаются в точке  $Q$ . Известно, что  $\angle PAD = \angle PQC$  и  $\angle ACD = \angle ADP$ . Докажите, что прямая  $AD$  касается описанной окружности треугольника  $BPD$ .

3. У двух квадратных трёхчленов  $p$  и  $q$  с отрицательными старшими коэффициентами равны наибольшие значения. Докажите, что можно подобрать числа  $s$  и  $t$  так, чтобы выполнялось тождество  $p(x) = q(sx-t)$ .

4. В городе Давилон есть 201 площадь. Каждая улица соединяет две площади (две площади могут быть соединены максимум одной улицей). Назовем две площади соседними, если они соединены улицей. Полицейский Мигль пытается поймать бандита Красавчика. Они действуют следующим образом. Вначале Мигль встаёт на одну из площадей Давилона по своему выбору. Затем площадь себе выбирает Красавчик. После этого они ходят по очереди (начинает Мигль), каждый из них своим ходом должен перебежать на соседнюю площадь. Каждый из них знает, где находится соперник. Мигль поймает Красавчика, если окажется на одной площади с ним. Известно, что Красавчик может действовать так, чтобы Мигль никогда его не поймал. При каком наибольшем количестве улиц это возможно?

5. Четыре попарно различных натуральных числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  в сумме дают 30 000. Найдите наименьшее возможное значение  $\text{НОК}(a, b, c, d)$ .

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы укажите ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО; ДАТА РОЖДЕНИЯ; ТЕЛЕФОН; КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ; ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние. Списки прошедших на городской и региональный тур будут опубликованы на сайтах [www.pdmi.ras.ru/~olymp](http://www.pdmi.ras.ru/~olymp) и [olymp.acadentalant.ru](http://olymp.acadentalant.ru)