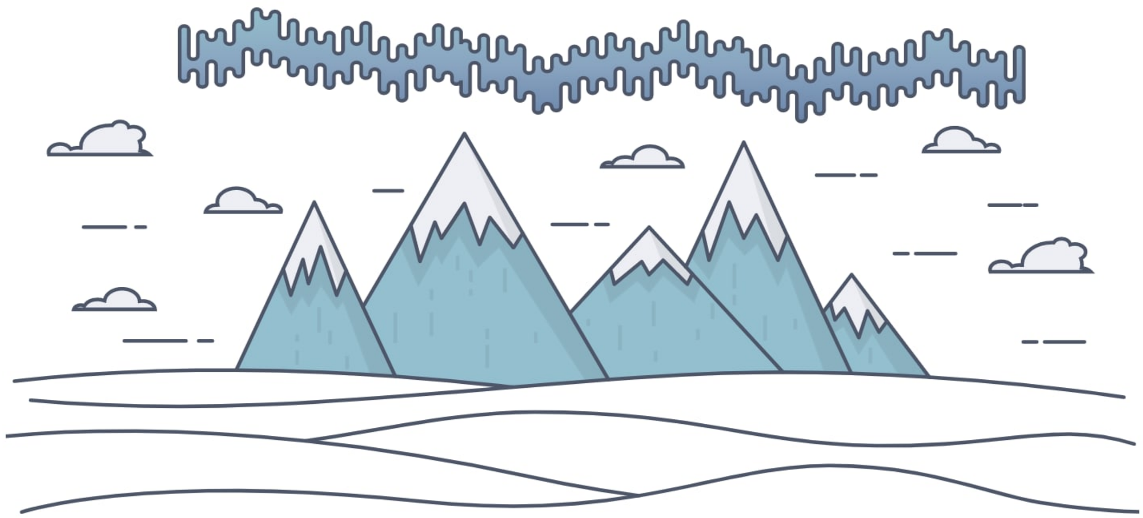
Проблемы из Скандинавии

ФТШ

13 апреля 2020



Задача 1. *Пусть p — простое число. Докажите, что многочлен $x^4 - px + p$ нельзя представить в виде произведения двух многочленов с целыми коэффициентами, отличных от константы.*

Задача 2. *Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность такая, что $a_1 = 1$ и*

$$3^{a_{n+1}-a_n} = 1 + \frac{5}{5n-4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Найдите наименьшее $n > 1$ такое, что a_n есть целое число.

Задача 3. *Пусть $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами. Известно, что есть различные целые числа a, b, c, d такие, что*

$$p(a) = p(b) = p(c) = p(d) = 5.$$

Докажите, что не существует целого числа m такого, что $p(m) = 8$.

Задача 4. *Функция f удовлетворяет неравенству $|f(a)-f(b)| \leqslant |a-b|^2$ для любых действительных a и b. Докажите, что функция f является постоянной.*

Задача 5. *Для положительных a, b и c выполняется неравенство $5abc > a^3+b^3+c^3$. Докажите, что существует треугольник, стороны которого имеют длины a, b, c.*

Задача 6. *Пусть a, b и c действительные числа такие, что уравнение $x^3+ax^2+bx+c=0$ имеет три действительных корня. Докажите, что корни этого уравнения не превосходят $\dfrac{2\sqrt{a^2-3b}-a}{3}$.*

Задача 7. *Энциклопедия состоит из 2000 томов. Тома сложены по-порядку стопкой так, что первый том на верху, а двухтысячный на низу. Со стопкой можно делать следующие операции:*

- *(i) Для четного n, вы можете взять сверху n томов и положить их под низ стопки не меняя порядок.*
- *(ii) Для нечетного n, вы можете взять сверху n томов, изменить в них порядок на противоположный и положить на верх стопки.*

Сколько различных перестановок томов вы можете получить используя данные операции?

Задача 8. *Действительные числа a, b, c такие, что $a^2+b^2=2c^2$ и $a \neq b$, $c \neq -a$, $c \neq -b$. Покажите, что*

$$\frac{(a+b+2c)(2a^2-b^2-c^2)}{(a-b)(a+c)(b+c)}$$

есть целое число.

Задача 9. *Найдите наименьшее натуральное n для которого существует n натуральных чисел, каждое из которых не превосходит n (не обязательно различных) $x_1, \ldots, x_n$ таких, что*

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=\frac{n(n+1)}{2}, \text{ и } x_1x_2\ldots x_n=n!,$$

но $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\} \neq \{1,2,\ldots,n\}$.