Районный тур 2023/24. 10 класс. I вариант

Задача 1.

Поскольку в процессе движения бусинки массой m по гладкому кольцу отсутствуют внешние силы, действующие вдоль направления движения, перед первым столкновением модуль ее скорости будет равен исходному значению v. Пусть скорости бусинки m и бусинки $4m$ сразу после столкновения равны V и U соответственно (по аналогичным соображениям величины скоростей бусинок будут оставаться неизменными вплоть до второго столкновения). В процессе соударения внешние силы не изменят суммарный импульс бусинок, а также не совершат работы, что позволяет нам воспользоваться законами сохранения импульса и энергии. Соответствующие уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} mv &= mV + 4mU, \\ \frac{mv^2}{2} &= \frac{mV^2}{2} + \frac{4mU^2}{2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Разделив обе части имеющихся равенств на общие множители, можно получить следующую систему уравнений на скорости V и U:

$$\begin{aligned} v &= V + 4U, \\ v^2 &= V^2 + 4U^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Если выразить из первого уравнения $V = v - 4U$ и подставить его во второе уравнение, то получится следующее квадратное уравнение относительно U:

$$20U^2 - 8Uv = 0 \quad \Leftrightarrow \quad U(5U - 2v) = 0. \tag{3}$$

Отсюда получаются два возможных решения исходных уравнений.

$$U_1 = 0, \quad V_1 = v, \tag{4}$$

$$U_2 = \frac{2}{5}v, \ \ V_2 = -\frac{3}{5}v. \tag{5}$$

Первое решение, представленное в (4), соответствует случаю, когда бусинка массы m пролетела сквозь вторую бусинку, не заметив ее, а значит, и не изменив скорость. Естественно, такая ситуация не противоречит законам сохранения энергии и импульса. Кроме того, есть второе решение, указанное в (5), при котором после соударения бусинка массы m начала двигаться в обратном направлении со скоростью $3v/5$, а вторая бусинка стала двигаться в том же направлении, что и бусинка массы m изначально, но со скоростью $2v/5$. Тогда они будут двигаться навстречу друг другу с относительной линейной скоростью, равной v. Таким образом, следующее соударение произойдёт через время, равное $T = 2\pi R/v$.

Ответ: $T = 2\pi R/v$.

Задача 2.

Всем величинам, относящимся к лёгкому кубику, будем приписывать индекс “1”, к тяжёлому — индекс “2”. Так, например, обозначим $m_1 = m$ и $m_2 = 2m$. Для определённости будем считать, что ускорения обоих грузиков a_1 и a_2 направлены вниз. Если в ходе решения будут получены отрицательные значения, это будет означать, что на самом деле грузики ускоряются в обратном направлении.

На Рис. 1 показаны все силы, действующие на грузики. Поскольку по условию нить невесомая, величина силы натяжения не изменяется вдоль неё. Введём ось Oy так, как показано на рисунке. В проекции на данную ось, второй закон Ньютона для грузиков принимает вид

$$m_1 g - T = m_1 a_1, \tag{6}$$

$$m_2 g - T = m_2 a_2. \tag{7}$$

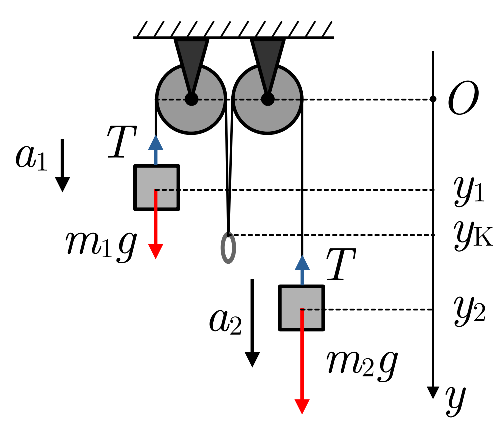

Рис. 1

Система уравнений (6) и (7) содержит три неизвестных: a_1, a_2 и T. Отметим, что все эти величины в общем случае не являются постоянными, а зависят от времени. Для того, чтобы данную систему можно было решить, необходимо найти ещё одно уравнение, связывающее данные величины.

Заметим, что в силу нерастяжимости нити в любой момент времени величина

$$S_y(t) \equiv y_1(t) + y_2(t) + 2y_\text{К}(t) = \text{const} \tag{8}$$

остаётся постоянной. Рассмотрим два близких момента времени t и $t + \Delta t$, тогда имеем

$$\begin{aligned} 0 = S_y(t+\Delta t) - S_y(t) = \big[y_1(t+\Delta t) + y_2(t+\Delta t) + 2y_\text{К}(t+\Delta t)\big] \\ - \big[y_1(t) + y_2(t) + 2y_\text{К}(t)\big] = \Delta y_1 + \Delta y_2 + 2\Delta y_\text{К}. \end{aligned} \tag{9}$$

Разделив выражение (9) на Δt и учитывая, что в пределе бесконечно малых Δt отношение $\Delta y/\Delta t$ даёт мгновенную скорость тела, получаем связь скоростей грузиков и кольца в произвольный момент времени

$$S_v(t) \equiv v_1(t) + v_2(t) + 2v_\text{К}(t) = 0\,. \tag{10}$$

Повторяя рассуждения, которые привели нас от (8) к (10), приходим к связи ускорений

$$S_a(t) \equiv a_1(t) + a_2(t) + 2a_\text{К}(t) = 0\,. \tag{11}$$

Уравнения (8), (10), (11) называются кинематическими связями.

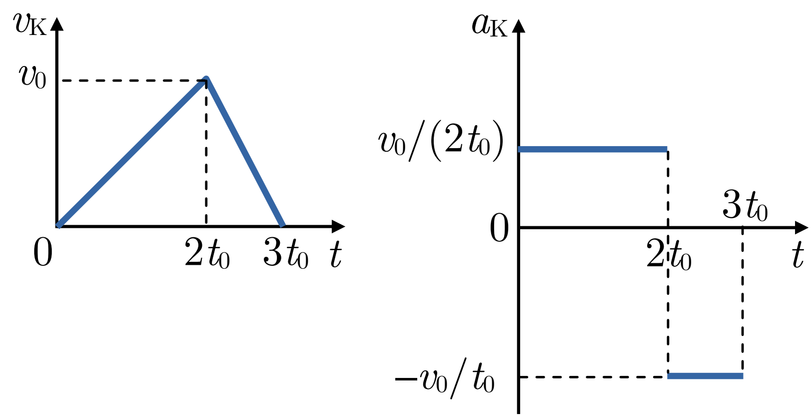

Рис. 2

Дополнив систему уравнений (6) и (7) уравнением (11), находим следующие выражения для неизвестных:

$$a_1(t) = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, g - \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\, a_\text{К}(t)\,, \tag{12}$$

$$a_2(t) = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\, g - \frac{2m_1}{m_2 + m_1}\, a_\text{К}(t)\,, \tag{13}$$

$$T(t) = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}\big[g + a_\text{К}(t)\big]\,. \tag{14}$$

Зависимость ускорения кольца $a_\text{К}$ от времени легко получить, проанализировав график, приведённый в условии (см. левую часть Рис. 2). В течение времени $2t_0$ от начала движения скорость кольца равномерно возрастала и достигла в конце величины v_0, поэтому ускорение было положительным и равнялось $v_0/(2t_0)$. После этого в течение времени t_0 кольцо равномерно замедлялось вплоть до полной остановки. Следовательно, на втором участке ускорение было отрицательное и равнялось $-v_0/t_0$. На правой части Рис. 2 построен график зависимости ускорения кольца от времени.

Используя уравнение (12) и Рис. 2, для зависимости ускорения грузика массой m от времени имеем

$$a_1 = -\frac{1}{3}g - \frac{4}{3}\frac{v_0}{2t_0}\,, \qquad 0 < t < 2t_0\,, \tag{15}$$

$$a_1 = -\frac{1}{3}g + \frac{4}{3}\frac{v_0}{t_0}\,, \qquad 2t_0 < t < 3t_0\,. \tag{16}$$

Отметим, что на первом этапе (в течение времени $2t_0$) полученное ускорение (15) груза отрицательно, поэтому он ускоряется вверх. На втором этапе (от момента $2t_0$ до $3t_0$) ускорение может иметь разный знак. Очевидно, что грузик не может ускоряться вниз с ускорением, превосходящим по величине g. Таким образом, выражение (16) даёт правильный ответ, только если $-g/3 + 4v_0/(3t_0) \leqslant g$, то есть при условии $v_0 \leqslant gt_0$. В противном случае ускорение равно g, что соответствует свободному падению грузика. Заметим также, что полученное ограничение соответствует неотрицательному значению силы натяжения нити T в уравнении (14): нить может быть только натянута, она не может толкать и разгонять грузик.

Ответ: При $0 < t < 2t_0$ ускорение в проекции на ось, направленную вниз, равно $-g/3 - 2v_0/(3t_0)$. При $2t_0 < t < 3t_0$ возможны два режима: если $v_0 \leqslant gt_0$, то ускорение равно $-g/3 + 4v_0/(3t_0)$; в противном случае ускорение равно g.

Задача 3.

Рассмотрим произвольный момент времени, когда угол между отрезком OA и вертикалью равен φ (см. левую часть Рис. 3). Поскольку жёсткий уголок вращается вокруг точки O, движение грузиков A и B также происходит вокруг точки O по окружностям с радиусами l и $l\sqrt{2}$ соответственно (угловые скорости совпадают). Это означает, что модули скоростей точек A и B связаны следующим соотношением:

$$v_{\mathrm{A}} = \frac{v_{\mathrm{B}}}{\sqrt{2}}\,. \tag{17}$$

Данную связь также можно получить, если воспользоваться тем, что проекции скоростей точек A и B на отрезок AB совпадают в силу жёсткости уголка (заметим, что аналогичное утверждение для *ускорений* неверно). Для нахождения v_{B} воспользуемся законом сохранения энергии (потенциальную энергию отсчитываем от уровня O):

$$-mgl = \frac{mv_{\mathrm{A}}^2}{2} + \frac{mv_{\mathrm{B}}^2}{2} - mgl\cos\varphi - mgl(\cos\varphi + \sin\varphi)\,. \tag{18}$$

Отсюда с учётом (17) получаем

$$\frac{3}{4}\,v_{\mathrm{B}}^2 = gl(\sin\varphi + 2\cos\varphi - 1)\,. \tag{19}$$

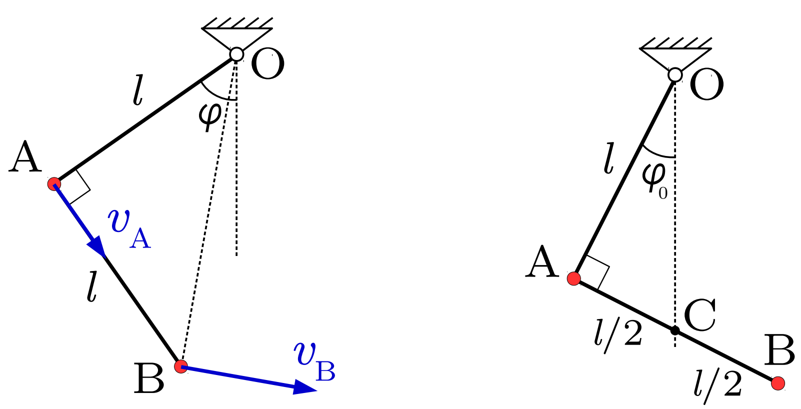

Рис. 3

Правая часть соотношения (19), связанная с изменением потенциальной энергии грузиков, нетривиальным образом зависит от угла φ. Так как потенциальная энергия определяется положением центра масс уголка С, максимальной скорости отвечает момент времени, когда прямая ОС вертикальна (см. правую часть Рис. 3). Из геометрии легко находим, что в этот момент $\operatorname{tg}\varphi_0 = 1/2$, $\sin\varphi_0 = 1/\sqrt{5}$, $\cos\varphi_0 = 2/\sqrt{5}$. Подставляя данные значения в формулу (19), находим

$$v_{\mathrm{B,max}} = \sqrt{\frac{4\left(\sqrt{5}-1\right)}{3}\, gl}\,. \tag{20}$$

Заметим, что общее уравнение (19) для произвольного значения φ можно было не выводить, т. к. было достаточно определить высоты точек А и В на Рис. 3 (справа). С другой стороны, максимум правой части в (19) можно было определять не из физических соображений, а чисто математически, пользуясь тем фактом, что в точке экстремума производная должна обращаться в нуль.

Для ответа на второй вопрос задачи, т. е. нахождения модуля ускорения a_{B}, в первую очередь отметим, что тангенциальная компонента ускорения в интересующий нас момент времени равна нулю, поскольку модуль скорости максимален. До этого момента модуль скорости увеличивался, а затем проекция ускорения на направление скорости становится отрицательной, и модуль скорости начинает убывать. Тогда достаточно вычислить центростремительное ускорение:

$$a_{\mathrm{B}} = \frac{v_{\mathrm{B,max}}^2}{l\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{3}\, g\,. \tag{21}$$

<u>Ответ</u>: Максимальное значение модуля скорости точки В равно $v_{\mathrm{B,max}} = \sqrt{4(\sqrt{5}-1)gl/3}$; ускорение точки В равно $a_{\mathrm{B}} = 2\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)g/3$.

Задача 4.

При протекании тока I через проводник с сопротивлением R в нём выделяется тепло с мощностью $P_+ = I^2R$. Если температура проводника T отличается от температуры окружающей среды T_0, то происходит отдача тепла в окружающую среду. Согласно условию, мощность тепловыделения P_- пропорциональна площади поверхности проводника S и разности температур $T - T_0$ с некоторым универсальным для обеих проволочек коэффициентом пропорциональности α, то есть $P_- = \alpha S(T - T_0)$. Если $P_+ > P_-$, то разница поступающего и отдаваемого в окружающую среду тепла идёт на нагрев проволочки. При этом мощность P_- увеличивается. Таким образом, при фиксированном протекающем токе в некоторый момент наступает равновесие, $P_+ = P_-$, все подводимое к проволочке тепло отдаётся в окружающую среду. По условию, напряжение U в сети медленно увеличивают, а значит, медленно увеличиваются и протекающие через проволочки токи. При каждом значении напряжения система успевает прийти в равновесие. Перегорание проволочки Π_1 происходит, когда её температура достигает температуры плавления $T_{\text{пл}}$. При перегорании проволочки напряжение фиксируют. Следовательно, ответ на вопрос о том, перегорит ли проволочка Π_2 или нет, зависит от того, будет ли температура необходимая для "равновесия мощностей" в этой проволочке больше или меньше температуры плавления.

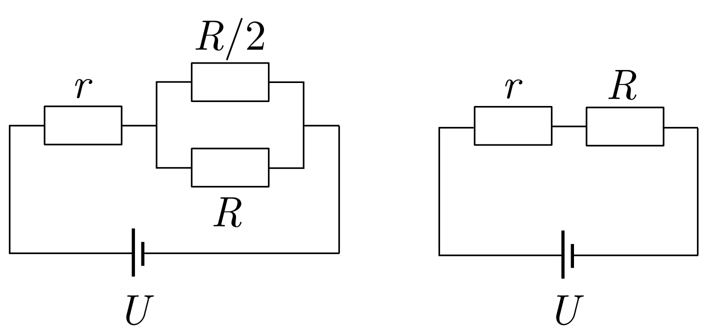

Рис. 4

Сопротивление проводника пропорционально его длине. Поскольку материалы и сечения проволочек $П_1$ и $П_2$ совпадают, а длины отличаются в два раза, сопротивление перегоревшей проволочки равно $R/2$. Эквивалентные схемы "до" и "после" перегорания проволочки показаны на левой и правой частях Рис. 4 соответственно. Рассмотрим сперва первую схему. Обозначим через I полный ток в цепи при напряжении источника U. Общее сопротивление параллельно соединенных проволочек равно

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R/2} \qquad \Leftrightarrow \qquad R_{12} = \frac{R}{3}\,. \tag{22}$$

По закону Ома

$$U = I\,(r + R_{12}) \qquad \Leftrightarrow \qquad I = \frac{U}{r + R/3}\,. \tag{23}$$

Данный ток делится в отношении 1:2 между сопротивлениями R и $R/2$. Следовательно, через проволочку $П_1$ протекает ток $2I/3$. Выпишем условие "равновесия мощностей" в момент перегорания проволочки $П_1$ (S — площадь её поверхности):

$$\alpha S(T_{пл} - T_0) = \left(\frac{2I}{3}\right)^2 \frac{R}{2} = \frac{2U^2R}{(3r+R)^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad T_{пл} = T_0 + \frac{2U^2R}{\alpha S(3r+R)^2} \tag{24}$$

Рассмотрим теперь вторую схему на Рис. 4. В этом случае ток в цепи равен

$$U = \tilde{I}\,(r + R) \qquad \Leftrightarrow \qquad \tilde{I} = \frac{U}{r + R}\,. \tag{25}$$

Учитывая, что площадь поверхности оставшейся проволочки в два раза больше, чем у перегоревшей, находим температуру T, необходимую для равновесия:

$$2\alpha S(T - T_0) = \tilde{I}^2 R = \frac{U^2R}{(r+R)^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad T = T_0 + \frac{U^2R}{2\alpha S(r+R)^2}\,. \tag{26}$$

Условие того, что оставшаяся проволочка не перегорит, принимает вид

$$T < T_{пл} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{2(r+R)^2} < \frac{2}{(3r+R)^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad R > r. \tag{27}$$

Ответ: Проволочка $П_2$ не перегорит, если $R > r$.

Задача 5.

Рассмотрим систему из двух тонких собирающих линз $Л_1$ и $Л_2$ (Рис. 5). Проходя через линзу $Л_1$, лучи

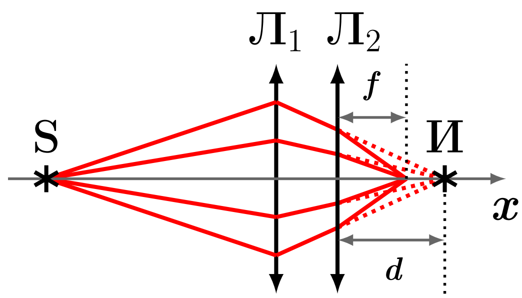

Рис. 5: Система из двух линз. S – лампочка; $Л_1$ – первая линза; И – изображение лампочки в первой линзе, расположенное в точке $x_1 = 70$ см; $Л_2$ – вторая линза с фокусным расстоянием $F = 60$ см, расположенная в точке $x_2 = 40$ см.

от лампочки преломляются, в результате чего на линзу $Л_2$ падает сходящийся пучок лучей. Точку И, в которую собрались бы лучи от лампочки в отсутствие линзы $Л_2$, можно рассматривать как мнимый источник лучей, падающих на линзу Л$_2$. Воспользуемся формулой тонкой линзы для Л$_2$, но предварительно сделаем некоторые замечания относительно её применения. Запишем формулу тонкой линзы:

$$\pm\frac{1}{d} \pm \frac{1}{f} = \pm\frac{1}{F}, \tag{28}$$

где d — расстояние от источника до линзы, f — расстояние от линзы до изображения, F — фокусное расстояние линзы. Вспомним правило знаков:

- перед $1/d$ ставится знак “+”, если источник действительный, и знак “−”, если источник мнимый;
- перед $1/f$ ставится знак “+”, если изображение действительное, и знак “−”, если изображение мнимое;
- перед $1/F$ ставится знак “+”, если линза собирающая, и знак “−”, если линза рассеивающая.

Учитывая, что в данной задаче линза собирающая, источник мнимый, а изображение действительное, запишем формулу (28) для линзы Л$_2$:

$$-\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \tag{29}$$

где $d = x_1 - x_2$ — расстояние от источника (точка И) до линзы Л$_2$, f — расстояние от линзы Л$_2$ до изображения лампочки в системе двух линз, F — фокусное расстояние линзы Л$_2$. Выразим из уравнения (29) расстояние f:

$$f = \frac{Fd}{d+F}. \tag{30}$$

Тогда координата изображения в системе двух линз определяется как $x_3 = x_2 + f$ и равняется 60 см.

Ответ: Координата изображения лампочки в системе двух линз равняется 60 см.

Районный тур 2023/24. 10 класс. II вариант

Задача 1.

Поскольку в процессе движения бусинки массой m по гладкому кольцу отсутствуют внешние силы, действующие вдоль направления движения, перед первым столкновением модуль ее скорости будет равен исходному значению v. Пусть скорости бусинки m и бусинки $6m$ сразу после столкновения равны V и U соответственно (по аналогичным соображениям величины скоростей бусинок будут оставаться неизменными вплоть до второго столкновения). В процессе соударения внешние силы не изменят суммарный импульс бусинок, а также не совершат работы, что позволяет нам воспользоваться законами сохранения импульса и энергии. Соответствующие уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} mv &= mV + 6mU, \\ \frac{mv^2}{2} &= \frac{mV^2}{2} + \frac{6mU^2}{2}. \end{aligned} \tag{31}$$

Разделив обе части имеющихся равенств на общие множители, можно получить следующую систему уравнений на скорости V и U:

$$\begin{aligned} v &= V + 6U, \\ v^2 &= V^2 + 6U^2. \end{aligned} \tag{32}$$

Если выразить из первого уравнения $V = v - 6U$ и подставить его во второе уравнение, то получится следующее квадратное уравнение относительно U:

$$42U^2 - 12Uv = 0 \quad \Leftrightarrow \quad U(7U - 2v) = 0. \tag{33}$$

Отсюда получаются два возможных решения исходных уравнений:

$$U_1 = 0, \quad V_1 = v, \tag{34}$$

$$U_2 = \frac{2}{7}v, \;\; V_2 = -\frac{5}{7}v. \tag{35}$$

Первое решение, представленное в (34), соответствует случаю, когда бусинка массы m пролетела сквозь вторую бусинку, не заметив её, а значит, и не изменив скорость. Естественно, такая ситуация не противоречит законам сохранения энергии и импульса. Кроме того, есть второе решение, указанное в (35), при котором после соударения бусинка массы m начала двигаться в обратном направлении со скоростью $5v/7$, а вторая бусинка стала двигаться в том же напрdавлении, что и бусинка массы m изначально, но со скоростью $2v/7$. Тогда они будут двигаться навстречу друг другу с относительной линейной скоростью, равной v. Таким образом, следующее соударение произойдёт через время, равное $T = 2\pi R/v$.

<u>Ответ</u>: $T = 2\pi R/v$.

Задача 2.

Всем величинам, относящимся к лёгкому кубику, будем приписывать индекс “1”, к тяжёлому — индекс “2”. Так, например, обозначим $m_1 = m$ и $m_2 = 4m$. Для определённости будем считать, что ускорения обоих грузиков a_1 и a_2 направлены вниз. Если в ходе решения будут получены отрицательные значения, это будет означать, что на самом деле грузики ускоряются в обратном направлении.

На Рис. 6 показаны все силы, действующие на грузики. Поскольку по условию нить невесомая, величина силы натяжения не изменяется вдоль неё. Введём ось Oy так, как показано на рисунке. В проекции на данную ось, второй закон Ньютона для грузиков принимает вид

$$m_1 g - T = m_1 a_1, \tag{36}$$

$$m_2 g - T = m_2 a_2. \tag{37}$$

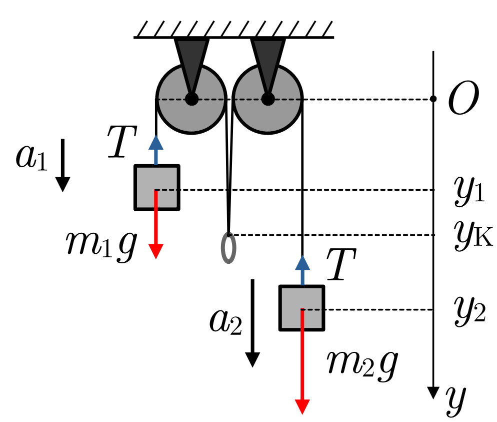

Рис. 6

Система уравнений (36) и (37) содержит три неизвестных: a_1, a_2 и T. Отметим, что все эти величины в общем случае не являются постоянными, а зависят от времени. Для того, чтобы данную систему можно было решить, необходимо найти ещё одно уравнение, связывающее данные величины.

Заметим, что в силу нерастяжимости нити в любой момент времени величина

$$S_y(t) \equiv y_1(t) + y_2(t) + 2y_{\text{К}}(t) = \text{const} \tag{38}$$

остаётся постоянной. Рассмотрим два близких момента времени t и $t + \Delta t$, тогда имеем

$$\begin{aligned} 0 = S_y(t+\Delta t) - S_y(t) = \big[y_1(t+\Delta t) + y_2(t+\Delta t) + 2y_{\text{К}}(t+\Delta t)\big] \\ - \big[y_1(t) + y_2(t) + 2y_{\text{К}}(t)\big] = \Delta y_1 + \Delta y_2 + 2\Delta y_{\text{К}}. \end{aligned} \tag{39}$$

Разделив выражение (39) на Δt и учитывая, что в пределе бесконечно малых Δt отношение $\Delta y/\Delta t$ даёт мгновенную скорость тела, получаем связь скоростей грузиков и кольца в произвольный момент времени

$$S_v(t) \equiv v_1(t) + v_2(t) + 2v_{\text{К}}(t) = 0\,. \tag{40}$$

Повторяя рассуждения, которые привели нас от (38) к (40), приходим к связи ускорений

$$S_a(t) \equiv a_1(t) + a_2(t) + 2a_{\text{К}}(t) = 0\,. \tag{41}$$

Уравнения (38), (40), (41) называются кинематическими связями.

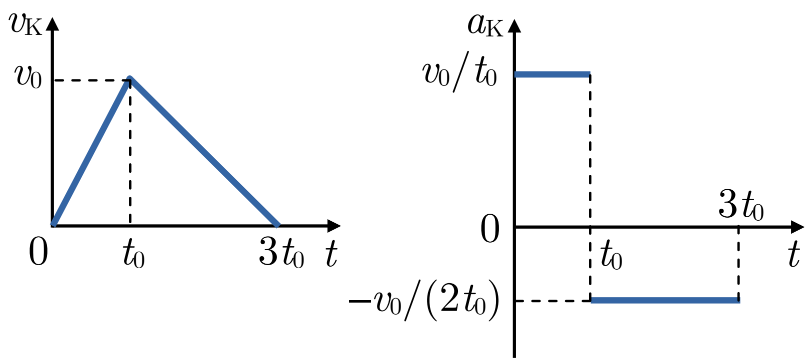

Рис. 7

Дополнив систему уравнений (36) и (37) уравнением (41), находим следующие выражения для неизвестных:

$$a_1(t) = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, g - \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\, a_{\text{К}}(t)\,, \tag{42}$$

$$a_2(t) = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\, g - \frac{2m_1}{m_2 + m_1}\, a_{\text{К}}(t)\,, \tag{43}$$

$$T(t) = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}\big[g + a_{\text{К}}(t)\big]\,. \tag{44}$$

Зависимость ускорения кольца $a_{\text{К}}$ от времени легко получить, проанализировав график, приведённый в условии (см. левую часть Рис. 7). В течение времени t_0 от начала движения скорость кольца равномерно возрастала и достигла в конце величины v_0, поэтому ускорение было положительным и равнялось v_0/t_0. После этого в течение времени $2t_0$ кольцо равномерно замедлялось вплоть до полной остановки. Следовательно, на втором участке ускорение было отрицательное и равнялось $-v_0/(2t_0)$. На правой части Рис. 7 построен график зависимости ускорения кольца от времени.

Используя уравнение (42) и Рис. 7, для зависимости ускорения грузика массой m от времени имеем

$$a_1 = -\frac{3}{5}g - \frac{8}{5}\frac{v_0}{t_0}, \qquad 0 < t < t_0, \tag{45}$$

$$a_1 = -\frac{3}{5}g + \frac{8}{5}\frac{v_0}{2t_0}, \qquad t_0 < t < 3t_0. \tag{46}$$

Отметим, что на первом этапе (в течение времени t_0) полученное ускорение (45) груза отрицательно, поэтому он ускоряется вверх. На втором этапе (от момента t_0 до $3t_0$) ускорение может иметь разный знак. Очевидно, что грузик не может ускоряться вниз с ускорением, превосходящим по величине g. Таким образом, выражение (46) даёт правильный ответ, только если $-3g/5 + 4v_0/(5t_0) \leqslant g$, то есть при условии $v_0 \leqslant 2gt_0$. В противном случае ускорение равно g, что соответствует свободному падению грузика. Заметим также, что полученное ограничение соответствует неотрицательному значению силы натяжения нити T в уравнении (44): нить может быть только натянута, она не может толкать и разгонять грузик.

Ответ: При $0 < t < t_0$ ускорение в проекции на ось, направленную вниз, равно $-3g/5 - 8v_0/(5t_0)$. При $t_0 < t < 3t_0$ возможны два режима: если $v_0 \leqslant 2gt_0$, то ускорение равно $-3g/5+4v_0/(5t_0)$; в противном случае ускорение равно g.

Задача 3.

Рассмотрим произвольный момент времени, когда угол между отрезком OA и вертикалью равен φ (см. левую часть Рис. 8). Поскольку жёсткий уголок вращается вокруг точки O, движение грузиков A и B также происходит вокруг точки O по окружностям с радиусами l и $l\sqrt{2}$ соответственно (угловые скорости совпадают). Это означает, что модули скоростей точек A и B связаны следующим соотношением:

$$v_{\mathrm{B}} = v_{\mathrm{A}}\sqrt{2}. \tag{47}$$

Данную связь также можно получить, если воспользоваться тем, что проекции скоростей точек A и B на отрезок AB совпадают в силу жёсткости уголка (заметим, что аналогичное утверждение для *ускорений* неверно). Для нахождения v_{A} воспользуемся законом сохранения энергии (потенциальную энергию отсчитываем от уровня O):

$$-mgl = \frac{mv_{\mathrm{A}}^2}{2} + \frac{mv_{\mathrm{B}}^2}{2} - mgl\cos\varphi - mgl(\cos\varphi + \sin\varphi). \tag{48}$$

Отсюда с учётом (47) получаем

$$\frac{3}{2}\,v_{\mathrm{A}}^2 = gl(\sin\varphi + 2\cos\varphi - 1). \tag{49}$$

Правая часть соотношения (49), связанная с изменением потенциальной энергии грузиков, нетривиальным образом зависит от угла φ. Так как потенциальная энергия определяется положением центра масс уголка C, максимальной скорости отвечает момент времени, когда прямая OC вертикальна (см. правую часть Рис. 8). Из геометрии легко находим, что в этот момент $\mathrm{tg}\ \varphi_0 = 1/2$, $\sin\varphi_0 = 1/\sqrt{5}$, $\cos\varphi_0 = 2/\sqrt{5}$. Подставляя данные значения в формулу (49), находим

$$v_{\mathrm{A,max}} = \sqrt{\frac{2\left(\sqrt{5}-1\right)}{3}\,gl}. \tag{50}$$

Заметим, что общее уравнение (49) для произвольного значения φ можно было не выводить, т. к. было достаточно определить высоты точек A и B на Рис. 8 (справа). С другой стороны, максимум правой части в (49) можно было определять не из физических соображений, а чисто математически, пользуясь тем фактом, что в точке экстремума производная должна обращаться в нуль.

Для ответа на второй вопрос задачи, т. е. нахождения модуля ускорения a_{A}, в первую очередь отметим, что тангенциальная компонента ускорения в интересующий нас момент времени равна нулю, поскольку модуль скорости максимален. До этого момента модуль скорости увеличивался, а затем проекция ускорения

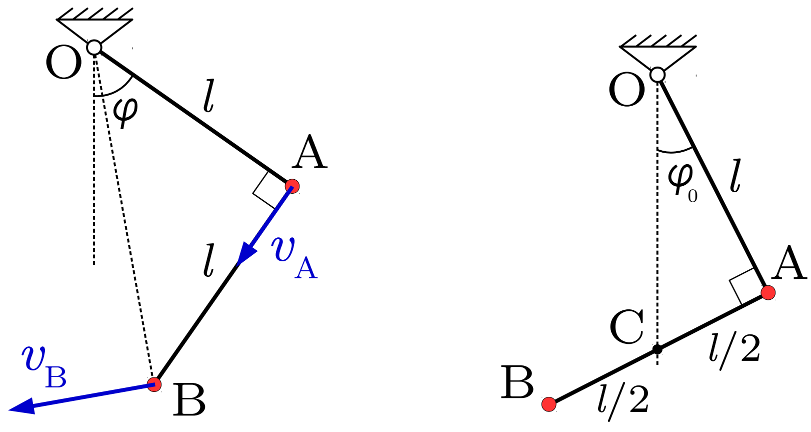

Рис. 8

на направление скорости становится отрицательной, и модуль скорости начинает убывать. Тогда достаточно вычислить центростремительное ускорение:

$$a_{\mathrm{A}} = \frac{v_{\mathrm{A,max}}^2}{l} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{3}\,g\,. \tag{51}$$

Ответ: Максимальное значение модуля скорости точки А равно $v_{\mathrm{A,max}} = \sqrt{2(\sqrt{5}-1)gl/3}$; ускорение точки А равно $a_{\mathrm{A}} = 2(\sqrt{5}-1)g/3$.

Задача 4.

При протекании тока I через проводник с сопротивлением R в нём выделяется тепло с мощностью $P_+ = I^2R$. Если температура проводника T отличается от температуры окружающей среды T_0, то происходит отдача тепла в окружающую среду. Согласно условию, мощность тепловыделения P_- пропорциональна площади поверхности проводника S и разности температур $T - T_0$ с некоторым универсальным для обеих проволочек коэффициентом пропорциональности α, то есть $P_- = \alpha S(T - T_0)$. Если $P_+ > P_-$, то разница поступающего и отдаваемого в окружающую среду тепла идёт на нагрев проволочки. При этом мощность P_- увеличивается. Таким образом, при фиксированном протекающем токе в некоторый момент наступает равновесие, $P_+ = P_-$, все подводимое к проволочке тепло отдаётся в окружающую среду. По условию, напряжение U в сети медленно увеличивают, а значит, медленно увеличиваются и протекающие через проволочки токи. При каждом значении напряжения система успевает прийти в равновесие. Перегорание проволочки Π_2 происходит, когда её температура достигает температуры плавления $T_{\text{пл}}$. При перегорании проволочки напряжение фиксируют. Следовательно, ответ на вопрос о том, перегорит ли проволочка Π_1 или нет, зависит от того, будет ли температура необходимая для "равновесия мощностей" в этой проволочке больше или меньше температуры плавления.

Сопротивление проводника пропорционально его длине. Поскольку материалы и сечения проволочек Π_1 и Π_2 совпадают, а длины отличаются в два раза, сопротивление перегоревшей проволочки равно $R/2$. Эквивалентные схемы "до" и "после" перегорания проволочки показаны на левой и правой частях Рис. 9 соответственно. Рассмотрим сперва первую схему. Обозначим через I полный ток в цепи при напряжении источника U. Общее сопротивление параллельно соединенных проволочек равно

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R/2} \qquad \Leftrightarrow \qquad R_{12} = \frac{R}{3}\,. \tag{52}$$

По закону Ома

$$U = I\,(r + R_{12}) \qquad \Leftrightarrow \qquad I = \frac{U}{r + R/3}\,. \tag{53}$$

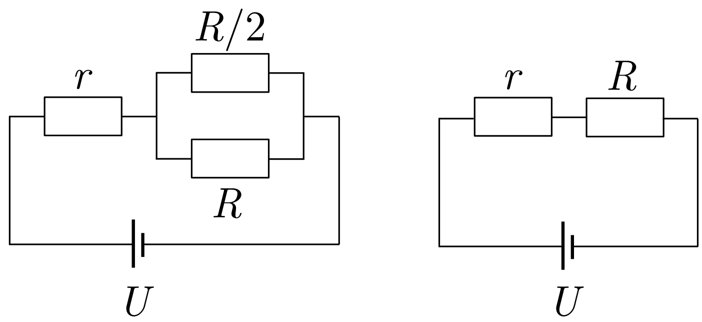

Рис. 9

Данный ток делится в отношении 1:2 между сопротивлениями R и $R/2$. Следовательно, через проволочку Π_2 протекает ток $2I/3$. Выпишем условие "равновесия мощностей" в момент перегорания проволочки Π_2 (S — площадь её поверхности):

$$\alpha S(T_{\text{пл}} - T_0) = \left(\frac{2I}{3}\right)^2 \frac{R}{2} = \frac{2U^2R}{(3r+R)^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad T_{\text{пл}} = T_0 + \frac{2U^2R}{\alpha S(3r+R)^2} \tag{54}$$

Рассмотрим теперь вторую схему на Рис. 9. В этом случае ток в цепи равен

$$U = \tilde{I}\,(r+R) \qquad \Leftrightarrow \qquad \tilde{I} = \frac{U}{r+R}\,. \tag{55}$$

Учитывая, что площадь поверхности оставшейся проволочки в два раза больше, чем у перегоревшей, находим температуру T, необходимую для равновесия:

$$2\alpha S(T - T_0) = \tilde{I}^2 R = \frac{U^2R}{(r+R)^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad T = T_0 + \frac{U^2R}{2\alpha S(r+R)^2}\,. \tag{56}$$

Условие того, что оставшаяся проволочка не перегорит, принимает вид

$$T < T_{\text{пл}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{2(r+R)^2} < \frac{2}{(3r+R)^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad R > r. \tag{57}$$

Ответ: Проволочка Π_1 не перегорит, если $R > r$.

Задача 5.

Рассмотрим систему из двух тонких собирающих линз Л$_1$ и Л$_2$ (Рис. 10). Проходя через линзу Л$_1$, лучи

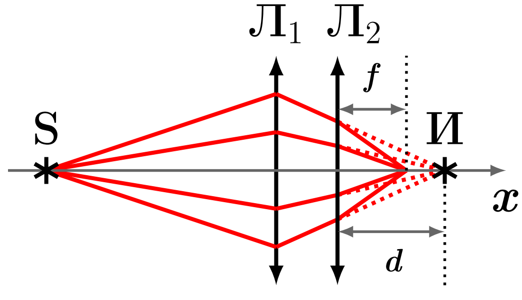

Рис. 10: Система из двух линз. S — лампочка; Л$_1$ — первая линза; И — изображение лампочки в первой линзе, расположенное в точке $x_1 = 80$ см; Л$_2$ — вторая линза с фокусным расстоянием $F = 30$ см, расположенная в точке $x_2 = 60$ см.

от лампочки преломляются, в результате чего на линзу Л$_2$ падает сходящийся пучок лучей. Точку И, в которую собрались бы лучи от лампочки в отсутствие линзы Л$_2$, можно рассматривать как мнимый источник лучей, падающих на линзу Л$_2$. Воспользуемся формулой тонкой линзы для Л$_2$, но предварительно сделаем некоторые замечания относительно её применения. Запишем формулу тонкой линзы:

$$\pm\frac{1}{d} \pm \frac{1}{f} = \pm\frac{1}{F}, \tag{58}$$

где d — расстояние от источника до линзы, f — расстояние от линзы до изображения, F — фокусное расстояние линзы. Вспомним правило знаков:

- перед $1/d$ ставится знак “+”, если источник действительный, и знак “−”, если источник мнимый;
- перед $1/f$ ставится знак “+”, если изображение действительное, и знак “−”, если изображение мнимое;
- перед $1/F$ ставится знак “+”, если линза собирающая, и знак “−”, если линза рассеивающая.

Учитывая, что в данной задаче линза собирающая, источник мнимый, а изображение действительное, запишем формулу (58) для линзы Л$_2$:

$$-\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \tag{59}$$

где $d = x_1 - x_2$ — расстояние от источника (точка И) до линзы Л$_2$, f — расстояние от линзы Л$_2$ до изображения лампочки в системе двух линз, F — фокусное расстояние линзы Л$_2$. Выразим из уравнения (59) расстояние f:

$$f = \frac{Fd}{d+F}. \tag{60}$$

Тогда координата изображения в системе двух линз определяется как $x_3 = x_2 + f$ и равняется 72 см.

Ответ: Координата изображения лампочки в системе двух линз равняется 72 см.