Возможные решения

9й класс 1-й вариант

Задача 1. Точный бросок.

Скорость мяча по вертикали: $v_y = v \cdot \sin\alpha$. Она не изменяется при отскоках от вертикальных стен комнаты, поэтому в проекции на ось y остается лишь движение с ускорением $a_y = -g$. За всё время полета вертикальная скорость мяча изменяется на противоположную, и потому находится из уравнения:

$v_y - gt = -v_y$, откуда $t = \dfrac{2v_y}{g} = \dfrac{2v\sin\alpha}{g}$

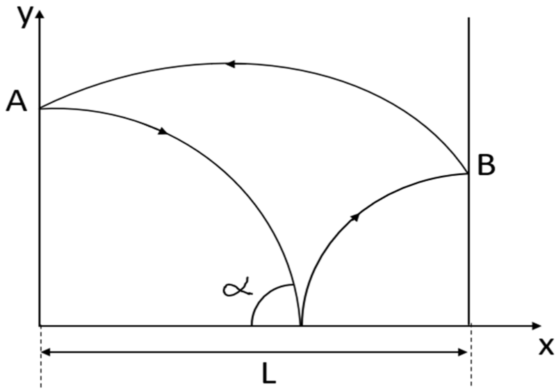

Рис.

За все время полета горизонтальная скорость мяча по модулю не изменялась, при этом мяч по горизонтали прошел двойное расстояние между стенами комнаты (см. рис). Тогда

$2L = v_x t = v\cos\alpha \cdot t$

$L = \dfrac{1}{2} v\cos\alpha \cdot t = \dfrac{v^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha$

Подставляя данные из условий, вычисляем

Ответ: $L = \dfrac{8\sqrt{3}}{5} \approx 2{,}8\ (\text{м})$

Задача 2. Электрическая схема.

Показание вольтметра, очевидно, зависят от места, куда его подключили. Обозначим точки подключения как A, B, C, D (см.рис.1).

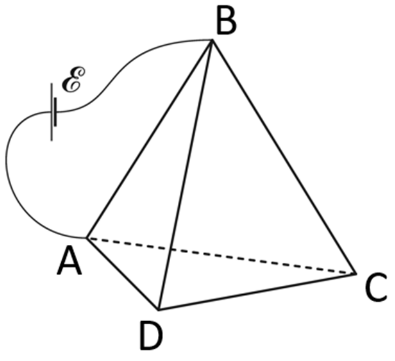

Рис.1

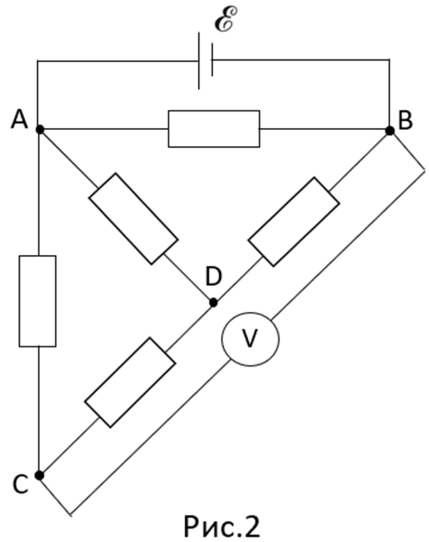

Рис.2

1)Если вольтметр подключен к точкам A и B, то фактически он измеряет напряжение на источнике $\boldsymbol{U = \mathcal{E} = 10}$ **В** (по условию, внутреннее сопротивление источника и проводов несущественно).

2) Если вольтметр подключен к точкам C и D, через него ток не идет, и мы имеем схему параллельного подключения участков AB, ACB и ADB. Точки C и D в этой схеме находятся в серединах параллельных одинаковых участков ACB и ADB, значит, на них одинаковый потенциал (напряжение, то есть разность потенциалов между точками A и C и A и D одинаково => потенциалы C и D равны).

Значит, вольтметр покажет ноль. $\boldsymbol{U = 0}$ **В.**

3) Допустим, вольтметр подключен к BC (остальные подключения: AC, AD и BD дадут такие же показания вольтметра в силу равнозначности точек C и D и, с точностью до знака ЭДС, точек A и B). Тогда схему можно перерисовать так (см. рис.2).

Пусть сопротивление каждой проволочки r. Участок ACD параллелен участку AD, поэтому общее сопротивление $r_{AD} = \dfrac{2r \cdot r}{2r + r} = \dfrac{2}{3} r$. Общее сопротивление участка ADB: $r_0 = r_{AD} + r = 5/3 \cdot r$. Полный ток через участок ADB: $I = \mathcal{E} / r_0 = 3/5\ (\mathcal{E}/r)$.

Тогда напряжение на участке DB: $U_{DB} = I \cdot r = 3/5 \cdot \mathcal{E}$,

на участке AD: $U_{AD} = \mathcal{E} - U_{DB} = \mathcal{E} - 3/5 \cdot \mathcal{E} = 2/5 \cdot \mathcal{E}$,

а на участке AC: $U_{AC} = 1/2 \cdot U_{AD} = 1/5 \cdot \mathcal{E}$.

Вольтметр покажет**:** $\boldsymbol{U_{CB} = \mathcal{E} - U_{AC} = 4/5 \cdot \mathcal{E}}$**.**

Ответ: вольтметр показывает $U = \mathcal{E} = 10$ В при подключении на участке AB, $U = 0$ В при подключении на участке CD, и $U = 4/5 \cdot \mathcal{E} = 8$ В при подключении на любом другом участке схемы.

Задача 3. Утро в сосновом лесу.

Пусть медведь поднимает бревно, прикладывая силу F_1 = 150Н или F_2 = 240Н к точкам A или B, (см. рис 1), опоры бревна находятся в точках C и D, а центр масс однородного бревна, это точка O. Найдем массу бревна M и положение точек C и D. Пусть AB = L = 6м, CD = d = 3м, OC = x , OD = $d - x$. Когда медведь поднимает бревно за край A, точкой опоры остается D. По правилу рычага: $F_1 \cdot$AD = $Mg\cdot$OD. Или:

$$F_1\left(\frac{L}{2}+d-x\right)=Mg\left(d-x\right) \tag{1}$$

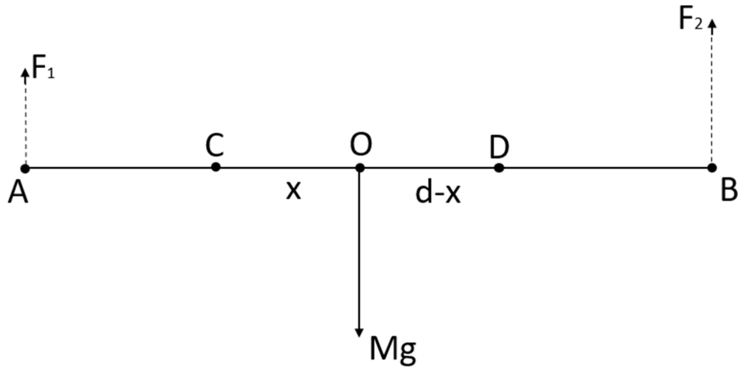

Рис.1

Аналогично, когда медведь поднимает бревно за край B и точка опоры бревна C:

$$F_2\left(\frac{L}{2}+x\right)=Mgx \tag{2}$$

Решив систему (1) и (2) , находим

$$x = 2 \text{ м и } Mg = 600 \text{ Н}. \tag{3}$$

(Лучше сразу численно подставить известные силы и длины, выразить Mg через x и, получив квадратное уравнение, найти один реалистичный корень x):

Напишем теперь условия, чтоб медвежонок массы m не опрокинул бревно. Достаточно посмотреть в крайних положениях (см. рис 2): 1) медвежонок на краю A и пишем правило рычага для не опрокидывания при вращении бревна вокруг C:

$$mg\cdot \text{AC} \le Mg\cdot \text{CO} \text{ или } mg\left(\frac{L}{2}-x\right)\le Mgx \tag{4}$$

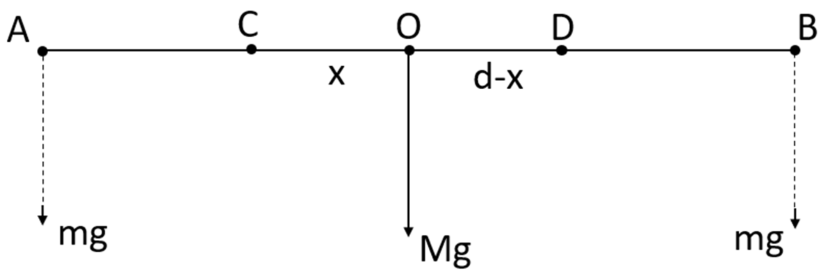

Рис.2

2) медвежонок на краю B и пишем правило рычага для не опрокидывания при вращении бревна вокруг D:

$$mg\cdot \text{BD} \le Mg\cdot \text{OD} \text{ или } mg\left(\frac{L}{2}-d+x\right)\le Mg\left(d-x\right) \tag{5}$$

подставив найденные в (3) значения в неравенства (4) и (5), получаем:

$mg \le 1200\left(\text{Н}\right)$ и $mg \le 300\left(\text{Н}\right)$

Второе условие сильнее.

***Ответ*:** масса медвежонка не должна превосходить примерно 30 кг.

Задача 4. Пружинный подвес.

Пружин нечетное число, пусть их в общем случае будет $2n + 1$. (здесь $n = 5$). Силу натяжения центральной пружины (которая прикреплена над центром перекладины) обозначим как F_0 , а все силы натяжения пружин слева направо будем обозначать F_n, F_{n-1},.. F_1, F_0, F_{-1}, F_{-n+1}, F_{-n}. Каждая пружина с на единицу бо́льшим номером, то есть находящаяся на шаг левее, имеет длину на одно и то же Δx больше, то есть ее сила натяжения увеличивается на одно и то же $f = k\cdot\Delta x$ при сдвиге влево. Значит, все силы справа налево образуют равномерно растущую последовательность (арифметическую прогрессию) и величина j-й силы

$$F_j = F_0 + j\cdot f. \tag{1}$$

Сумма всех сил упругости от $-n$ до n уравновешивает вес перекладины и гимнаста, то есть

$$\sum F_j = mg + Mg$$

Или

$$\sum\left(F_0 + jf\right) = \left(2n+1\right)F_0 = mg + Mg$$

Откуда

$$F_0 = \frac{m+M}{2n+1}g = 100\left(\text{Н}\right)$$

Напишем теперь правило вращательного равновесия (сумма моментов сил равно нулю) относительно центра перекладины. Пусть расстояние между соседними пружинами будет d, тогда j-я сила имеет относительно центра плечо jd и момент $M_j = F_j \cdot jd$. Это верно и для сил справа, (для них плечо jd и момент отрицательны, т.к. силы справа пытаются вращать систему в противоположную сторону. Имеем:

$$\sum M_j - Mg\cdot nd = \sum F_j\cdot jd - Mg\cdot nd = 0$$

Или

$$\sum\left(F_0 + jf\right)\cdot jd = Mg\cdot nd \tag{3}$$

Суммирование в (3) ведется от $j = -n$ до $j = n$.

Сумма моментов от постоянной силы F_0 равна нулю и, сократив ещё на d, получим из (3):

$$\left(\sum j^2\right)\cdot f = Mg\cdot n \tag{4}$$

$$\sum_{-n}^{n} j^2 = \frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{3} \tag{5}$$

Не зная или не выводя эту формулу, сумму при $n = 5$ несложно посчитать напрямую

$$\sum_{-5}^{5} j^2 = 110$$

Тогда из (4) и (5) получаем

$$f = \frac{3Mg}{\left(n+1\right)\left(2n+1\right)} = \frac{Mg}{22} = 20\left(\text{Н}\right)$$

Сила упругости крайней левой пружины:

$$F_n = \frac{1}{2n+1}\left(\left(m+M\right)g + 3Mg\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{11}\left(\left(m+M\right)g + \frac{5}{2}Mg\right) = 200\left(\text{Н}\right)$$

Сила упругости крайней правой пружины:

$$F_{-n} = \frac{1}{2n+1}\left(\left(m+M\right)g - 3Mg\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{11}\left(\left(m+M\right)g - \frac{5}{2}Mg\right) = 0\left(\text{Н}\right)$$

Задача 5. Паровая машина.

Коэффициент полезного действия, для тепловой машины это отношение полезной работы к затраченному теплу, то есть $\eta = A/Q$, или

$$Q = A/\eta \qquad (1)$$

Подставляя в это уравнения $A = Pt$ и $Q = cm(T_2 - T_1) + Lm$ получим соотношение между временем работы паровой машины t и массой воды m, за это время нагретой до кипения и превращенной в пар:

$$cm\left(T_2 - T_1\right) + Lm = \frac{Pt}{\eta} \qquad (2)$$

За время t вода в трубке проходит путь $h = vt$, значит, через сечение трубки протекает объем $V = Sh$, то есть в нагреватель по трубке вернулась масса воды:

$$m = \rho V = \rho Svt \qquad (2)$$

Подставляя выражение для массы из (3) в (2), сократив на время t, находим искомую скорость течения воды в трубке паровой машины.

***Ответ*:** $v = \dfrac{P}{\eta\rho S\left(c\left(T_2 - T_1\right) + L\right)} = 0{,}05\ \text{м/с} = 5\ \text{см/с}$

9й класс 2-й вариант

Задача 1. Точный удар.

Скорость мяча по вертикали: $v_y = v \cdot \sin\alpha$. Она не изменяется при отскоках от вертикальных стен корта, поэтому в проекции на ось y остается лишь движение с ускорением $a_y = -g$.
За всё время полета вертикальная скорость мяча изменяется на противоположную, и потому находится из уравнения:

$v_y - gt = -v_y$, откуда $t = \dfrac{2v_y}{g} = \dfrac{2v\sin\alpha}{g}$

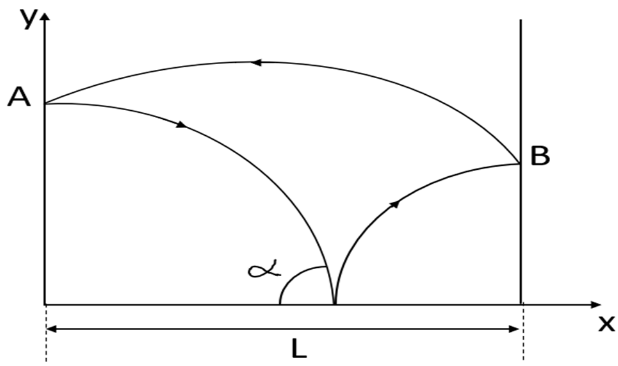

Рис.

За все время полета горизонтальная скорость мяча по модулю не изменялась, при этом мяч по горизонтали прошел двойное расстояние между стенами корта (см. рис). Тогда

$$2L = v_x t = v\cos\alpha \cdot t$$

$$L = \frac{1}{2} v\cos\alpha \cdot t = \frac{v^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha$$

Подставляя данные из условий, вычисляем

Ответ: $L = 10\sqrt{3} \approx 17{,}3\,(\text{м})$.

Задача 2. Электрическая схема

Показание вольтметра, очевидно, зависят от участка в схеме, куда его подключили. Обозначим возможные точки подключения как A, B, C, D (см. рис.1).

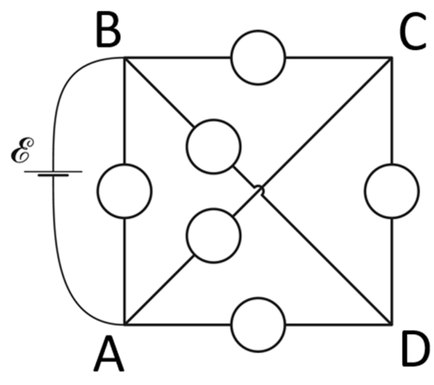

Рис.1

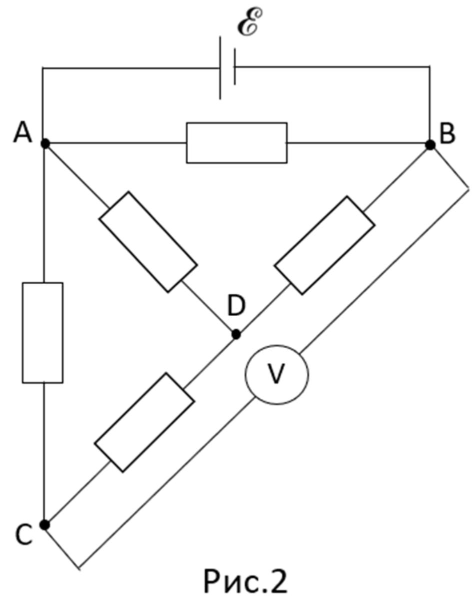

Рис.2

1) Если вольтметр подключен к точкам A и B, то фактически он измеряет напряжение на источнике $\boldsymbol{U = \mathcal{E} = 5}$ **В** (по условию, внутреннее сопротивление источника и проводов несущественно).

2) Если вольтметр подключен к точкам C и D, ток через идеальный вольтметр не идет, значит, мы имеем схему параллельного подключения участков AB, ACB и ADB. Точки C и D в этой схеме находятся в серединах параллельных одинаковых участков ACB и ADB, поэтому на них одинаковый потенциал (напряжение, то есть разность потенциалов между точками A и C и A и D одинаково => потенциалы C и D равны). Значит, вольтметр покажет ноль. $\boldsymbol{U = 0}$ **В**

3) Допустим, вольтметр подключен к BC (остальные подключения: AC, AD и BD дадут такие же показания вольтметра в силу равнозначности точек C и D и, с точностью до знака ЭДС, точек A и B). Тогда схему можно перерисовать так (см. рис.2). Пусть сопротивление каждой проволочки r. Участок ACD параллелен участку AD, поэтому общее сопротивление $r_{\text{AD}} = \dfrac{2r \cdot r}{2r + r} = \dfrac{2}{3} r$.

Общее сопротивление участка ADB: $r_0 = r_{\text{AD}} + r = 5/3 \cdot r$.

Полный ток через участок ADB: $I = \mathcal{E} / r_0 = 3/5\ (\mathcal{E}/r)$.

Тогда напряжение на участке DB: $U_{\text{DB}} = I \cdot r = 3/5 \cdot \mathcal{E}$,

на участке AD: $U_{\text{AD}} = \mathcal{E} - U_{\text{DB}} = \mathcal{E} - 3/5 \cdot \mathcal{E} = 2/5 \cdot \mathcal{E}$,

а на участке AC: $U_{\text{AC}} = 1/2 \cdot U_{\text{AD}} = 1/5 \cdot \mathcal{E}$.

Вольтметр покажет**:** $\boldsymbol{U_{\text{CB}} = \mathcal{E} - U_{\text{AC}} = 4/5 \cdot \mathcal{E}}$**.**

Ответ: вольтметр показывает $U = \mathcal{E} = 5$ В при подключении на участке AB, $U = 0$ В при подключении на участке CD, и $U = 4/5 \cdot \mathcal{E} = 4$ В при подключении на любом другом участке схемы.

Задача 3. Утро в сосновом лесу

Пусть медведь поднимает бревно, прикладывая силу F_1 = 300Н или F_2 = 180Н к точкам А или В, (см. рис 1), опоры бревна находятся в точках С и D, а центр масс (однородного) бревна, это точка О. Найдем массу бревна M и положение точек С и D. Пусть АВ = L = 8м, CD = d = 3м, ОС = x, OD = $d - x$. Когда медведь поднимает бревно за край А, точкой опоры остается D. По правилу рычага: $F_1 \cdot$AD = $Mg \cdot$OD. Или:

$$F_1\left(\frac{L}{2}+d-x\right)=Mg\left(d-x\right) \qquad (1)$$

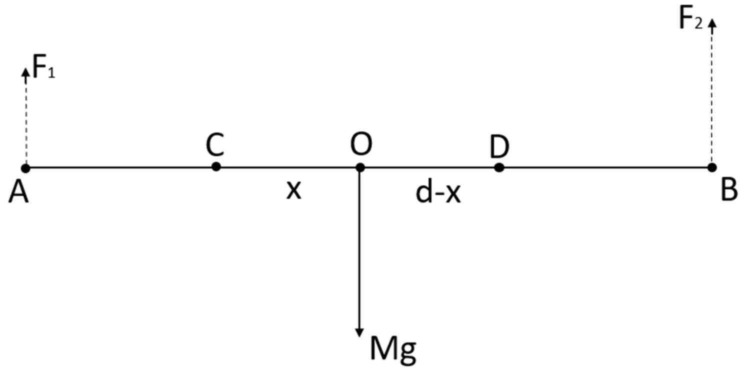

Рис.1

Аналогично, когда медведь поднимает за край В и точка опоры С:

$$F_2\left(\frac{L}{2}+x\right)=Mgx \qquad (2)$$

Решив систему (1) и (2) , находим расстояние

$$x = 1 \text{ м и } Mg = 900 \text{ Н}. \qquad (3)$$

(Лучше сразу численно подставить известные силы и длины, выразить Mg через x и, получив квадратное уравнение, найти один реалистичный корень x):

Напишем теперь условия, чтоб медвежонок массы m не опрокинул бревно. Достаточно посмотреть в крайних положениях (см. рис 2):

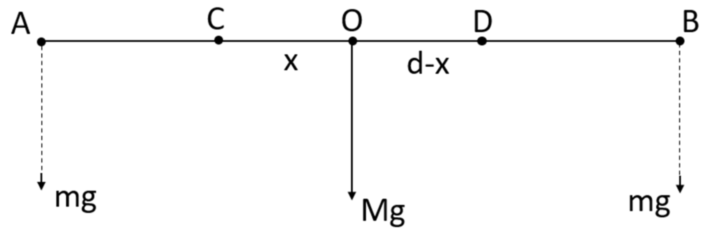

Рис.2

1) медвежонок на краю А и пишем правило рычага для не опрокидывания при вращении бревна вокруг С:

$$mg\left(\frac{L}{2}-x\right)\le Mgx \qquad (4)$$

2) медвежонок на краю В и пишем правило рычага для не опрокидывания при вращении бревна вокруг D:

$$mg\left(\frac{L}{2}-d+x\right)\le Mg\left(d-x\right) \qquad (5)$$

подставив найденные в (3) значения в неравенства (4) и (5), получаем:

$mg \le 300\,(\text{Н})$ и $mg \le 900\,(\text{Н})$

Первое условие сильнее.

***Ответ*:** масса медвежонка не должна превосходить примерно 30 кг.

Задача 4. Пружинный подвес

Пружин нечетное число, пусть их в общем случае будет $2n + 1$. (здесь $n = 4$). Силу натяжения центральной пружины (которая прикреплена над центром перекладины) обозначим как F_0, а все силы натяжения пружин слева направо будем обозначать F_n, $F_{n\text{-}1}$, F_1, F_0, F_{-1}, F_{-n+1}, F_{-n}. Каждая пружина с на единицу бо́льшим номером, то есть находящаяся на шаг левее, имеет длину на одно и то же Δx больше, то есть ее сила натяжения увеличивается на одно и то же $f = k\cdot\Delta x$ при сдвиге влево. Значит, все силы справа налево образуют равномерно растущую последовательность (арифметическую прогрессию) и величина j-й силы

$$F_j = F_0 + j\cdot f. \tag{1}$$

Сумма всех сил упругости от $-n$ до n уравновешивает вес перекладины и гимнаста, то есть

$$\sum F_j = mg + Mg$$

Или

$$\sum\left(F_0 + jf\right) = \left(2n+1\right)F_0 = mg + Mg$$

Откуда

$$F_0 = \frac{m+M}{2n+1}g = 120\left(\text{Н}\right)$$

Напишем теперь правило вращательного равновесия (сумма моментов сил равно нулю) относительно центра перекладины. Пусть расстояние между соседними пружинами будет d, тогда j-я сила имеет относительно центра плечо jd и момент $M_j = F_j\cdot jd$. Это верно и для сил справа, (для них плечо jd и момент отрицательны, т.к. силы справа пытаются вращать систему в противоположную сторону. Имеем:

$$\sum M_j - Mg\cdot nd = \sum F_j\cdot jd - Mg\cdot nd = 0$$

Или

$$\sum\left(F_0 + jf\right)\cdot jd = Mg\cdot nd \tag{3}$$

Суммирование в (3) ведется от $j = -n$ до $j = n$.

Сумма моментов от постоянной силы F_0 равна нулю и, сократив ещё на d, получим из (3):

$$\left(\sum j^2\right)\cdot f = Mg\cdot n \tag{4}$$

$$\sum_{-n}^{n} j^2 = \frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{3} \tag{5}$$

Не зная или не выводя эту формулу, сумму при $n = 4$ несложно посчитать напрямую

$$\sum_{-5}^{5} j^2 = 60$$

Тогда из (4) и (5) получаем

$$f = \frac{3Mg}{\left(n+1\right)\left(2n+1\right)} = \frac{Mg}{15} = 30\left(\text{Н}\right)$$

Подставив массы и $n = 4$ в формулы, из (1), (2) и (7) получаем ответ:

Сила упругости крайней левой пружины:

$$F_n = \frac{1}{2n+1}\left(\left(m+M\right)g + 3Mg\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{9}\left(\left(m+M\right)g + \frac{12}{5}Mg\right) = 240\left(\text{Н}\right)$$

Сила упругости крайней правой пружины:

$$F_{-n} = \frac{1}{2n+1}\left(\left(m+M\right)g - 3Mg\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{9}\left(\left(m+M\right)g - \frac{12}{5}Mg\right) = 0\left(\text{Н}\right)$$

Тогда растяжения пружин будут равны $\Delta x_n = \dfrac{F_n}{k} = 1\,(\text{м})$ и $\Delta x_{-n} = \dfrac{F_{-n}}{k} = 0\,(\text{м})$

Задача 5. Паровая машина.

Коэффициент полезного действия, для тепловой машины это отношение полезной работы к затраченному теплу, то есть $\eta = A/Q$, или

$$Q = A/\eta \quad (1)$$

Подставляя в это уравнения $A = Pt$ и $Q = cm(T_2 - T_1) + Lm$ получим соотношение между временем работы паровой машины t и массой воды m, за это время нагретой до кипения и превращенной в пар:

$$cm\left(T_2 - T_1\right) + Lm = \frac{Pt}{\eta} \quad (2)$$

За время t вода в трубке проходит путь $h = vt$, значит, через сечение трубки протекает объем $V = Sh$, то есть в нагреватель по трубке вернулась масса воды:

$$m = \rho V = \rho S v t \quad (2)$$

Подставляя выражение для массы из (3) в (2), сократив на время t, находим искомую площадь сечения трубки возврата воды паровой машины.

Ответ: $S = \dfrac{P}{\eta\rho v\left(c\left(T_2 - T_1\right) + L\right)} = 0{,}001\ \text{м}^2 = 10\ \text{см}^2$